Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übung

Abgabe: Montag, 25.11.2013, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Eine Straßenbahn lege in ländlichem Gebiet zwischen zwei Haltestellen eine gerade Strecke von 1000 m zurück. Zu Beginn der Fahrt beschleunigt der Straßenbahnfahrer mit $1,5\,\mathrm{m/s^2}$, schaltet zu einem bestimmten Zeitpunkt direkt von Beschleunigung auf Bremsen um und bremst dann mit einer Beschleunigung von $-1\,\mathrm{m/s^2}$ ab.
Nach welcher Distanz muss der Fahrer umschalten, damit er an der nächsten Haltestelle zum Stehen kommt?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wenden Sie die Picard-Lindelöf-Iteration

$$\begin{aligned} y_0 &= \eta \\ y_{n+1} &= \eta + \int_\xi^x f(t, y_n(t))dt \end{aligned}$$

für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = xy(x) + 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

an: Berechnen Sie genügend viele Iterationsschritte, um eine explizite Formel für y_n zu erkennen. Beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
In der Vorlesung wurde als Beispiel für eine Gleichung, zu der das Anfangswertproblem nicht eindeutig lesbar ist, angegeben

$$y' = f(y)\ ,\ y(0) = y_0$$

mit $f(a) := \sqrt{|a|}$.

(a) Geben Sie ein konkretes y_0 sowie zwei Lösungen des Anfangswertproblems explizit an.

(b) Insbesondere kann damit das oben angegebene f nicht alle Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf erfüllen. Welche ist hier verletzt? Zeigen Sie noch einmal direkt, dass die betroffene Voraussetzung in unserem Beispiel nicht gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Die Funktion $f(x,u)$ sei im Streifen $S = J \times \mathbb{R}$, $J = [0,a]$ stetig und genüge der Bedingung

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq \frac{k}{x}|u - v| \quad \text{für } 0 < x \leq a,\ \ u, v \in \mathbb{R}$$

mit $k < 1$. Weisen Sie nach, dass das Anfangswertproblem $u' = f(x,u)$ in J, $u(0) = \eta$, genau eine Lösung besitzt und dass sich diese durch sukzessive Approximation berechnen lässt.
Hinweis: Die Menge $B := \{u \in C(J) \mid \|u\| < \infty\}$ bildet einen Banachraum bezüglich der Norm $\|u\| := \sup\{|u(x)|/x \mid 0 < x \leq a\}$ (was Sie ohne Beweis verwenden dürfen). Zeigen Sie, dass der Operator T, definiert durch

$$(Tu)(x) := \int_0^x f(t, \eta + u(t))dt \quad ,$$

B nach B abbildet, und dort eine Kontraktion ist. Zeigen Sie ferner, dass die Fixpunkte von T bis auf eine Konstante die Lösungen des Anfangswertproblems sind.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html