Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dipl. Math. F. Krügel **WS 2013/2014**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung

Abgabe: Montag, 02.12.2013, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und u, v seien Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(t,u), \\ \dot{v} &= g(t,v), \end{aligned}$$

auf einem Intervall $[a,b)$. Zeigen Sie für diese Situation folgendes Vergleichsprinzip:
Gilt $u(a) \le v(a)$ und

$$f(t,s) < g(t,s) \text{ für alle } (t,s) \in [a,b) \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

so folgt $u(t) < v(t)$ für alle $t \in (a,b)$.
Hinweis: Aus (1) folgt *nicht* direkt, dass $f(t,u(t)) < g(t,v(t))$ gilt, da hier bei f und g im zweiten Argument potentiell unterschiedliche Werte eingesetzt wurden. Versuchen Sie deshalb einen Widerspruchsbeweis. Zeigen Sie nun zunächst, dass es dann einen Punkt $t_1 > a$ gibt mit $u(t_1) = v(t_1)$ und $u(t) < v(t)$ für $t \in (a,t_1)$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $u(a) < v(a)$ und $u(a) = v(a)$.
Bemerkung: Die Aussage bleibt auch richtig, wenn man (1) abschwächt zu

$$f(t,v(t)) < g(t,v(t)) \text{ für alle } t \in [a,b), \tag{2}$$

oder alternativ auch zu

$$f(t,u(t)) < g(t,u(t)) \text{ für alle } t \in [a,b). \tag{3}$$

Dies ist gelegentlich hilfreich, wenn man die Lösung einer Gleichung mit Hilfe des Vergleichprinzips abschätzen will, wofür man oft durch Abschätzung der rechten Seite eine geeignete explizit lösbare zweite Gleichung wählen kann, deren Lösung womöglich gar nicht ganz $\mathbb{R}$ als Wertebereich hat. Ab sofort dürfen Sie auch diese Variante des Vergleichsprinzips ohne weitere Begründung verwenden (mit Verweis auf das Vergleichsprinzip, o.ä.).

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{v} = 1 + tv^2, \quad v(1) = 1.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Vergleichsprinzips aus Aufgabe 1, dass die Lösung bei einem endlichen $T_E > 1$ „explodiert“ ($v(t) \to +\infty$ für $t \to T_E$).

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gebe eine Konstante $C > 0$ derart, dass

$$0 < f(y) < Cy \ln y \quad \text{für alle } y > 1.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y(0) = y_0 > 1,$$

nicht explodiert, d.h. dass die Lösung beschränkt ist auf jedem Intervall $[0, T)$ mit endlichem T, für das sie definiert ist. Geben Sie eine explizite obere und untere Schranken für y auf $[0, T)$ in Abhängigkeit von $T > 0$ an.
Hinweis: Vergleichsprinzip; $\frac{d}{dy} \ln \ln y = \frac{1}{y \ln y}$ für $y > 1$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Das Polygonzugverfahren ist in der Numerischen Mathematik auch unter dem Namen „explizites Euler-Verfahren“ bekannt. Für ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad f \text{ stetig}$$

und eine gegebene Schrittweite $h > 0$ werden zwei Folgen konstruiert:

$$\begin{aligned} x_i &:= x_{i-1} + h \quad , \\ y_i &:= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\} \quad . \end{aligned}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die stückweise linearen Funktionen

$$p_h(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1}) \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad , \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

für $h \to 0$ bis auf Teilfolge gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert.

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung von

$$y' = 3y(1 - y) \quad , \quad y(0) = \frac{1}{2} \quad .$$

(b) Bestimmen Sie die Approximationen $p_h(x)$ dieser Lösung für $x \in [0, 2]$ für folgende Schrittweiten:

$$h = \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6} \quad \text{(d.h. für } n = 2, 3, 4, 6),$$

indem Sie jeweils die Folge $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ berechnen. (Für $n = 4$ und $n = 6$ reicht es, wenn Sie bis $i = 3$ rechnen.)

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html