Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dr. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

8. Übung

Abgabe: Montag, 09.12.2013, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Zu den stärksten Quellen von Gammastrahlen in abgebrannten Brennstäben aus Kernkraftwerken gehört unter anderem Plutonium-241 (Pu^{241}), welches mit einer Halbwertszeit von 14 Jahren in Americium-241 zerfällt. Americium-241 (Am^{241}) zerfällt seinerseits mit einer Halbwertszeit von 432 Jahren in Neptunium-237 (Np^{237}).

(a) Wir betrachten zunächst zwei radioaktive Nuklide A und B, wobei B das Zerfallsprodukt von A sei. Nach dem Zerfallsgesetz ist die Zerfallsrate (die zeitliche Änderung der Stoffmenge eines Nuklids) proportional zur vorhandenen Stoffmenge. Hier haben wir noch den zusätzlichen Effekt, dass B neu gebildet wird mit einer Rate, die gleich der Zerfallsrate von A ist. Stellen Sie ein System von Differentialgleichungen für die Stoffmengen y_A und y_B auf. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Systems bei vorgegebenen Anfangswerten von y_A und y_B zum Zeitpunkt Null.

(b) Die Halbwertszeit ist die Zeit, nach der die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge vorhanden ist, wobei das einfache Zerfallsgesetz zugrunde gelegt wird (ohne Neubildungen). Wie hängt die Halbwertszeit mit dem Proportionalitätsfaktor zusammen? Welche Daten ergeben sich bei Pu^{241} und Am^{241}?

(c) Die Intensität der ausgesandten Gammastrahlung eines Nuklids ist proportional zur Stoffmenge, wobei der Proportionalitätsfaktor bei Am^{241} etwa 30000mal so hoch ist wie bei Pu^{241}. Zur Zeit $t = 0$ sei kein Am^{241} vorhanden. Nach welcher Zeit erreicht die Gesamtstrahlungsintensität von Pu^{241} und Am^{241} ihr Maximum?

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $p \in [1, \infty)$. Wir betrachten auf $\mathbb{R}^n$ die Normen

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} , \qquad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i| \ .$$

(a) Zeichnen Sie die Einheitssphäre bezüglich $\| \cdot \|_p$ für $p = 1$, $p = 2$ und $p = \infty$ im $\mathbb{R}^2$ im gleichen Koordinatensystem (Skalierung etwa $1 \mathrel{\widehat{=}} 4$cm).

(b) Beweisen Sie, dass die ∞-Norm und die p-Norm für $p \in [1, \infty)$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, und bestimmen Sie die Konstanten. Folgern Sie daraus, dass die p-Norm gegen die ∞-Norm konvergiert für $p \to \infty$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Seien $a > 0$ und $J := [0, a]$. Auf dem vorletzten Übungsblatt wurde der Banachraum

$$B := \{u \in C(J) \mid \|u\|_B < \infty\}$$

betrachtet, mit

$$\|u\|_B := \sup_{x \in (0,a]} \frac{|u(x)|}{x}$$

Da $B \subset C(J)$ gilt, ist für alle $u \in B$ auch die gewöhnliche Supremumsnorm

$$\|u\|_{C(J)} := \sup_{x \in J} |u(x)| = \sup_{x \in (0,a]} |u(x)|$$

endlich.

(a) Finden Sie ein $K > 0$, so dass für alle $u \in B$ gilt: $\|u\|_{C(J)} \leq K\|u\|_B$.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Normen $\|\cdot\|_B$ und $\|\cdot\|_{C(J)}$ auf B nicht äquivalent sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten folgendes System von Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\begin{cases} y'''(t) = z''(t) + y'(t)^2 - 3y(t) + z(t)^4 \\ z'''(t) = y''(t) + y'(t)^2 - 2z'(t) - 3z(t)^2 \end{cases} \tag{1}$$

Wir interessieren uns für die Anfangswerte

$$\begin{cases} y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0 \\ z(0) = -1, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

beziehungsweise

$$\begin{cases} y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y'''(0) = 0 \\ z(0) = -1, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(a) Schreiben Sie das System (1) in ein äquivalentes System erster Ordnung um.

(b) Verwenden Sie den Satz von Picard-Lindelöf für Systeme, um zu zeigen, dass (1) mit (2) eine eindeutige Lösung hat.

(c) Zeigen Sie, dass (1) mit (3) keine Lösung hat.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html