Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dr. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

9. Übung

Abgabe: Montag, 16.12.2013, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Ein einfaches Modell, das die Höchstgeschwindigkeit von Fahrzeugen erklären kann, erhält man, wenn man einer als konstant angenommenen Antriebskraft die Reibungskraft entgegensetzt, etwa Luftwiderstand oder Reibung der Räder auf der Straße. Der Einfachkeit halber nehmen wir hier an, dass die Reibungskraft, die immer entgegen die Bewegungsrichtung wirkt, proportional zur Geschwindigkeit ist. Schreibt man die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Ort $x(t)$ des Fahrzeugs zur Zeit t als System für $x(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$, ergibt das (mit Fahrzeugmasse $m = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = v, \qquad \frac{dv}{dt} = f - \sigma v.$$

wobei $f > 0$ die konstante Antriebskraft und $\sigma > 0$ der konstante Reibungskoeffizient ist, die als gegeben betrachtet werden. Wir verwenden die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0 \quad \text{(Startpunkt)}, \qquad v(0) = 0 \quad \text{(Startgeschwindigkeit)}.$$

(a) Handelt es sich hierbei um ein autonomes System?

(b) Bestimmen Sie die Lösung $(x(t), v(t))$ explizit.

(c) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = f/\sigma$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t} = f/\sigma$. Kann das Fahrzeug seine Maximalgeschwindigkeit in endlicher Zeit erreichen?

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Wir betrachten das mathematische Pendel mit Reibung:

$$\ddot{\varphi}(t) = -\sin(\varphi(t)) - \sigma\dot{\varphi}(t),$$

mit einer Konstanten $\sigma > 0$ (Reibungskoeffizient). Zeigen Sie:

(a) Die „Energie“ $E(\varphi, \dot{\varphi}) := \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \cos(\varphi)$ ist hier zwar nicht konstant längs von Lösungen, aber aus der Differentialgleichung folgt immerhin noch $\frac{d}{dt}E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \leq 0$ für alle $t \in [0, T)$ (solange die Lösung bis T existiert). Ferner kann der Fall $\frac{d}{dt}E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = 0$ zu einer Zeit t nur auftreten, wenn $\dot{\varphi}(t) = 0$ gilt.

(b) $\dot{\varphi}$ ist auf $[0, T)$ beschränkt. Geben Sie explizite obere und untere Schranken an, die nur von $E(\varphi(0), \dot{\varphi}(0))$ abhängen, aber nicht von T.
Bemerkung: Insbesondere können weder φ noch $\dot{\varphi}$ in endlicher Zeit explodieren, womit die Lösung φ für alle $t \geq 0$ existiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten die nichtlineare Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + h(x(t)) = 0$$

mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion h, wobei $xh(x) > 0$ für $x \neq 0$ gelte und $h(0) = 0$. Sei H das Potential wie in der Vorlesung definiert. Wir betrachten eine periodische Lösung $x(t)$ mit $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.

(a) Die Dauer V der Viertelschwingung ist die Zeit, nach der $\dot{x}(V) = 0$ und $r := x(V) > 0$ gilt. Zeigen Sie

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{H(r) - H(s)}} ds$$

(b) Sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\dot{x}(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(c+t) = x(c-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Die beiden Funktionen lösen dasselbe Anfangswertproblem (Welches?).

(c) Wir nehmen jetzt zusätzlich an, dass h ungerade ist, d.h. $h(-s) = -h(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$x(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(c+t) = -x(c-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(d) Sei h ungerade. Zeigen Sie, dass die Lösung T-periodisch ist mit $T = 4V$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten das lineare System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x-y \end{pmatrix}, \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(a) Überprüfen Sie, dass $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren der Systemmatrix A sind, und geben Sie die Eigenwerte an.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen von (1), die von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(t)v_1 \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta(t)v_2$$

sind. Welche Gleichung muss dazu α bzw. β erfüllen?

(c) Bestimmen Sie die Lösung von (1) zum Anfangswert $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4v_1 + v_2$.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html