Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dr. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

10. Übung

Abgabe: Mittwoch, 08.01.2014, bis 16:00 Uhr

(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Die Aufgaben werden in der Woche vom 13.1.2014 besprochen. Die Übungen in der Woche vom 6.1. finden statt und dienen als Fragestunde. Bitte beachten Sie den von unserem regulären Termin abweichenden **Abgabetermin am Mittwoch**!

Aufgabe 1:

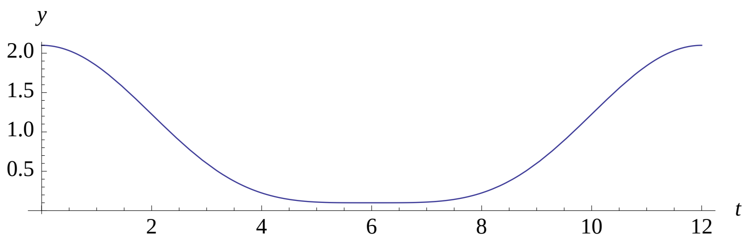
Das Bild zeigt die symmetrische Lösung $t \mapsto y(t)$ einer Differentialgleichung. Zu welchem Typ Differentialgleichung könnte sie gehören? Man hat folgende Auswahl:

(a) $y'(t) = f(y(t))$,

(b) $y''(t) + f(y'(t)) = 0$,

(c) $y''(t) + y'(t) = f(y(t))$,

(d) $y''(t) = f(y(t))$,



mit Lipschitzstetigem f. Begründen Sie, weshalb gewisse Typen ausgeschlossen sind, egal wie f gewählt ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Romeo und Julia laden das Ehepaar Montague zum Adventskaffee ein. Die Montagues sagen zu und kündigen an, dass sie höchstens eine Stunde bleiben können. Julia gibt sich viel Mühe mit der Dekoration des Tisches und stellt eine kegelförmige Kerze mit kreisförmiger Grundfläche, einer Höhe von 10cm und einem unteren Durchmesser von 2cm auf. Wird die Kerze während des gesamten Besuches brennen, wenn sie angezündet wird, sobald die Montagues an der Tür klingeln? Es wäre schließlich dem harmonischen Verlauf dieses Promibesuchs abträglich, wenn man die Kerze zwischendurch erneuern müsste.

Stellen Sie die Differentialgleichung für die Höhe der brennenden Kerze auf und finden Sie deren Lösung. Sie dürfen dabei annehmen, dass die Kerze auch unten noch schlank genug ist, um bis zum Rand zu schmelzen, und dass dabei 1cm^3 Wachs in 6 Minuten verbraucht wird. Nach welcher Zeit ist die Kerze ganz heruntergebrannt?

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t), \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Geben Sie ein äquivalentes Anfangswertproblem mit einem Gleichungssystem erster Ordnung an. Bestimmen Sie die Picard-Iteration dieses Systems, indem Sie analog zu Aufgabe 2 von Blatt 6 die ersten Iterationsschritte explizit berechnen und dadurch auf die allgemeine Formel schließen. Welche Funktionen ergeben sich im Grenzwert?
(Auf einen Induktionsbeweis können Sie hier verzichten.)

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten das Gleichungssystem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{x^2} & 0 \end{pmatrix} y(x), \quad x \in (0, \infty). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $y_1(x) := \begin{pmatrix} 2x^2 \\ 4x \end{pmatrix}$ eine Lösung von (1) ist.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Reduktionsverfahrens von d'Alembert ein Fundamentalsystem von (1).

(5 Punkte)

Wir wünschen Ihnen allen ein frohes Weihnachtsfest, schöne Feiertage und ein gutes neues Jahr!

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html