Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
Dr. F. Krügel

WS 2013/2014

Gewöhnliche Differentialgleichungen

11. Übung

Abgabe: Montag, 20.01.2014, bis 14:00 Uhr
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)

Aufgabe 1:
Drei konkurrierende Firmen A, B und C haben zur Zeit $t = 0$ folgende Marktanteile: A hat 40%, B hat 20%, und C hat 40%. Wir nehmen an, dass diese sich kontinuierlich mit der Zeit verändern, mit Raten proportional zu den aktuellen Marktanteilen, womit die Marktanteile einem linearen System von Differentialgleichungen genügen:

$$\dot{m}(t) = R\,m(t), \quad \text{wobei } m(t) = \begin{pmatrix} m_A(t) \\ m_B(t) \\ m_C(t) \end{pmatrix} \text{ die Marktanteile zur Zeit } t \text{ angibt.}$$

Konkret verliere A Marktanteile mit Raten von $1m_A$ bzw. $2m_A$ an B bzw. C, B verliere Marktanteile mit Raten von $3m_B$ an A und $2m_B$ an C, und C verliere Marktanteile mit einer Rate von jeweils $1m_C$ an A und B. (Also verliert A durch Abwanderung von Bestandskunden Marktanteile mit einer Rate von $3m_A$ an die Konkurrenz, und gewinnt gleichzeitig durch das Anwerben von Fremdkunden Marktanteile mit einer Rate von $3m_B+1m_C$ hinzu.)

(a) Geben Sie die Matrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Proportionalitätskonstanten an, sowie den Vektor m_0 der Anfangsmarktanteile.

(b) Offenbar gilt $(1,1,1)R = (0,0,0)$. Zeigen Sie, dass für jedes $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $(1,1,1)S = (0,0,0)$ und jede Lösung $\tilde{m}$ von $\dot{\tilde{m}} = S\tilde{m}$ gilt, dass $(1,1,1)\tilde{m}(t) = \tilde{m}_A(t) + \tilde{m}_B(t) + \tilde{m}_C(t)$ unabhängig von t ist. Was bedeutet das im Kontext des Modells?

(c) Überprüfen Sie, dass

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von R sind, und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

(d) Bestimmen Sie die Lösung m des Anfangswertproblems $\dot{m} = R\,m$, $m(0) = m_0$.

(e) Finden Sie heraus, ob und bei welchen Marktanteilen sich der Markt für große Zeit stabilisiert. Konvergiert $m(t)$ für $t \to +\infty$, und falls ja, wogegen?

Hinweis: In (d) und (e) ist es bequem, m_0 und $m(t)$ als Linearkombination der Eigenvektoren von R darzustellen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie für das lineare Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y(t)$$

ein reelles Fundamentalsystem.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) \quad , \quad \vec{x}(0) = \vec{\xi} \quad , \tag{1}$$

wobei A eine konstante reelle 3×3 Matrix, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die gesuchte (reelle) Funktion ist. Nehmen Sie an, dass für diese Matrix A gilt:

$$A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j$$

für

$$\lambda_1 = 2, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 1 + 3i, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 + 3i \\ -4 \\ 2 + i \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Lösung von (1) für $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Finden Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen inhomogenen Systems:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \vec{b}(t),$$

wobei

$$\text{(a)} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Suchen Sie eine partikuläre Lösung in der Form

(a) $\vec{x}_p(t) = \vec{q}e^{2t}$, wobei $\vec{q}$ ein konstanter Vektor ist,

(b) $\vec{x}_p(t) = \vec{q}(t)e^{-t}$, wobei die Komponenten von $\vec{q}(t)$ Polynome ersten Grades in t sind.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html