**Prof. Dr. B. Kawohl**
**PD Dr. S. Krömer**
**Dr. F. Krügel**

**WS 2013/2014**

**Gewöhnliche Differentialgleichungen**

**12. Übung**

**Abgabe: Montag, 27.01.2014, bis 14:00 Uhr**
(oben rechts in den Kasten für Übungsblätter im MI-Container, Wilhelm-Waldeyer-Str.)
Dies ist das letzte Blatt; für die Zulassung zur Klausur müssen Sie also insgesamt 120 von 240 möglichen Punkten in den Übungen erreichen.

**Aufgabe 1:**
Finden Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen zu

$$\begin{array}{rcrrr} \dot{x}_1 & = & 5x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ \dot{x}_2 & = & 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 \\ \dot{x}_3 & = & -6x_1 & -2x_2 & -2x_3 \end{array} \tag{1}$$

Bestimmen Sie dabei auch die Jordan-Normalform der Systemmatrix.
**Zur Kontrolle:** 2 ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 2:**
Wir betrachten das zur skalaren Gleichung

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} - bx = 0$$

äquivalente System

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & 2ay + bx \end{array}$$

mit reellen Parametern $a, b$.
Markieren Sie in der $a$-$b$-Ebene alle Flächen, in denen dieses System einen stabilen oder instabilen Knoten, einen Sattelpunkt oder einen stabilen oder instabilen Strudel besitzt. (Auf die Untersuchung der Grenzfälle können Sie hier verzichten.)

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 3:**
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Gleichung

$$y''' - y'' + y' - y = \sin 2x.$$

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 4:**
Wir nehmen an, dass der Stoßdämpfer eines durchschnittlichen Autos, das mit konstanter Geschwindigkeit über Bodenwellen fährt, durch einen harmonischen Oszillator mit kleiner Dämpfung modelliert werden kann. Seine Auslenkung $u$ aus dem Gleichgewichtszustand erfüllt dementsprechend

$$u''(t) + 2au'(t) + bu(t) = \cos(\omega t),$$

mit Parametern $a \geq 0$ (Dämpfungkoeffizient), $b > 0$ (Federkonstante), $\omega > 0$ (Kreisfrequenz der periodischen Stöße durch Bodenwellen). Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen können Sie annehmen, dass $a^2 < b$ gilt.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u_h$ der homogenen Gleichung, in Abhängigkeit der Parameter.

(b) Bestimmen Sie, falls möglich, eine partikuläre Lösung $u_p$ der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz $u_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Für manche Kombinationen von $a, b, \omega$ führt dieser Ansatz nicht zum Ziel – welche sind das?

(c) Bestimmen Sie in den Ausnahmefällen aus (b) eine partikuläre Lösung $u_p$ der inhomogenen Gleichung mit dem Ansatz $u_p(t) = (A_1 + A_2 t)\cos(\omega t) + (B_1 + B_2 t)\sin(\omega t)$.

(d) Es sei $a = 0$, und die Eigenschwingung des Stoßdämpfers (Lösung der homogenen Gleichung) habe eine Periode von 2 Sekunden. Wie weit sollten die Bodenwellen auseinanderliegen, damit ein Auto bei einer Geschwindigkeit von 20 km/h immer heftiger auf und ab schwingt?

**(5 Punkte)**

**Anmeldung zur Klausur**
Um an der Klausur am 12.2.2014 teilnehmen zu können, ist neben der in den Übungen erworbenen Zulassung auch noch eine Anmeldung erforderlich, **bis zum 5.2.2014**. Auch Teilnehmer, die bereits Altzulassungen gemeldet haben, müssen sich wie alle anderen zur Klausur anmelden. Für Studierende in Bachelorstudiengängen erfolgt die Anmeldung über KLIPS. Das Anmeldeverfahren für andere Teilnehmer und zusätzliche Informationen finden Sie auf der **Veranstaltungshomepage**:

**http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1314WS/ODE.html**