

Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundlagen

Vorlesung von Florian Krügel, Sommersemester 2014

Erstes Übungsblatt

Aufgabe 1. Finden Sie eine Formel für die Wurfweite eines Balls bei vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit (v_x, v_y) , wenn die Abwurfhöhe $y_0 > 0$ beträgt, und ansonsten alle Annahmen wie in der Vorlesung erfüllt sind (z. B. keine Reibung).

Aufgabe 2. Handelt es sich bei den folgenden Dingen um Aussagen? Wenn ja, sind die Aussagen dann wahr oder falsch?

- (a) $23 + 80 \cdot 7$
- (b) $2 + 3 = 4 + 1$
- (c) $6 + x = 10$
- (d) Für alle reellen Zahlen x gilt $6 + x = 10$.

Aufgabe 3. Von den folgenden drei Mengen sind zwei gleich. Welche?

- (a) $\{2\}$
- (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$
- (c) $\{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^2 = 4\}$

Aufgabe 4. Sind A, B, C drei Mengen und $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Abbildungen, dann ist die Verkettung $g \circ f : A \rightarrow C$ („ g nach f “) definiert durch $a \mapsto g(f(a))$. Was ist die Verkettung in folgenden Fällen?

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x + 1$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(y) = y^2$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sqrt{x^{1764} + x^{44} + 77}$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(y) = 4$

Aufgabe 5. Finden Sie Exponenten b, c derart, dass

$$\begin{aligned} 27^b &= 81 \\ 81^c &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Hinweis: b und c können aus \mathbb{Q} gewählt werden (also als Brüche).

Aufgabe 6. Wo ist der Fehler in der folgenden Argumentation?

Behauptung: Alle reellen Zahlen sind gleich.

Beweis: Seien x, y zwei beliebige reelle Zahlen. Wir zeigen, dass diese gleich sind. Sei d die Differenz, also $x = y + d$. Daraus folgt (nach Multiplikation mit $x - y$ auf beiden Seiten):

$$\begin{aligned} x^2 - xy &= xy - y^2 + dx - dy \\ \implies x^2 - xy - dx &= xy - y^2 - dy \\ \implies x \cdot (x - y - d) &= y \cdot (x - y - d) \\ \implies x &= y \end{aligned}$$

Aufgabe 7. Eine Pflanze wächst derart, dass die Wachstumsgeschwindigkeit ihrer Höhe (gemessen in cm/Tag) zu jedem Zeitpunkt das 0,02-fache der Höhe (gemessen in cm) ist. Die Höhe sei anfangs 3 cm. Wie hoch ist die Pflanze nach 14 Tagen?

Achtung: Das bedeutet nicht, dass die Pflanze sich in einem Tag um das 0,02-fache vergrößert, sondern es handelt sich um eine Momentangeschwindigkeit.

Aufgabe 8. Durch einen voll geöffneten Wasserhahn fließen 180 Milliliter pro Sekunde. Diese maximale Fließgeschwindigkeit bezeichnen wir mit M . Der anfangs geschlossene Wasserhahn wird nun so geöffnet, dass zum Zeitpunkt t (in Sekunden) die Fließgeschwindigkeit $\frac{M \cdot t^2}{25}$ beträgt. Nach 5 Sekunden ist der Wasserhahn also voll geöffnet. Wieviel Wasser ist in diesen 5 Sekunden ins darunterliegende Waschbecken geflossen?

Aufgabe 9. Finden Sie Stammfunktionen von:

(a) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

(b) $x \mapsto \frac{1}{2x}$

(jeweils definiert auf der Menge der positiven Zahlen).

Aufgabe 10. Wir suchen eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, definiert auf der Menge der reellen Zahlen, die größer als 1 sind (womit ausgeschlossen wird, dass man durch Null teilt).

(a) Warum funktioniert $x \mapsto \ln(x^2 - 1)$ nicht?

(b) Stattdessen funktioniert überraschenderweise die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Überprüfen Sie das.