

## Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundlegung

Vorlesung von Florian Krügel, Sommersemester 2014

### Zweites Übungsblatt

**Aufgabe 1.** Wir hatten gesehen, dass die Funktion  $t \mapsto ce^{\lambda t}$  beispielsweise Abkühlung, Atomzerfall und bakterielles Wachstum beschreibt.

- (a) Durch eine Messung stellt man fest, dass ein sich abkühlender Körper, der anfangs (zum Zeitpunkt 0) eine Temperaturdifferenz von  $14,8^\circ\text{C}$  (gegenüber der Umgebungstemperatur) hat, und nach 17 Minuten die Temperaturdifferenz noch  $14,4^\circ\text{C}$  beträgt. Welche Temperaturdifferenz zur Umgebungstemperatur hat der Körper nach 3 Stunden? Bestimmen Sie dazu zunächst  $\lambda$  und  $c$ .
- (b) Geben Sie eine allgemeine Formel für den oben geschilderten Sachverhalt an. Das bedeutet: Eine exponentiell wachsende Größe habe zum Zeitpunkt 0 den Wert  $a_0 \in \mathbb{R}^+$ , und nach der Zeit  $t_1 \in \mathbb{R}^+$  den Wert  $a_1 \in \mathbb{R}^+$ . Welchen Wert findet man nach einer Zeit  $t_2 \in \mathbb{R}$ ?

**Aufgabe 2.** Wir betrachten die Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die die mittlere Komponente entfernt und die anderen beiden vertauscht. Also wird ein Vektor  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  auf  $\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}$  abgebildet.

- (a) Warum ist diese Abbildung linear?
- (b) Finden Sie die Abbildungsmatrix.

**Aufgabe 3.** Von der Fußball-WM möchte ein Fußball-Fan von Rio de Janeiro nach Köln zurückfliegen, und fragt sich nach der Länge der kürzesten Flugstrecke. Der Kölner Flughafen liegt bei  $50,88^\circ$  nördlicher Breite und  $7,12^\circ$  östlicher Länge, der Flughafen von Rio de Janeiro liegt bei  $22,81^\circ$  südlicher Breite und  $43,24^\circ$  westlicher Länge. Wie weit sind die Flughäfen voneinander entfernt?

**Aufgabe 4.** Wir betrachten auf  $C([0, 1], \mathbb{R})$  (der Menge der stetigen Funktionen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ) das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Finden Sie  $a \in \mathbb{R}$ , so dass  $f$  und  $g$ , definiert durch

$$f(t) = t \quad \text{und} \quad g(t) = a - t$$

senkrecht aufeinanderstehen (bezüglich  $\langle, \rangle$ ).

**Aufgabe 5.** Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $v_1, v_2$  eine Orthonormalbasis bilden.

- (b) Bestimmen Sie  $\lambda_1, \lambda_2$ , so dass

$$\begin{pmatrix} \sqrt{10} \\ 2\sqrt{10} \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

gilt.

**Aufgabe 6.** Vier Punkte liegen auf einer Geraden in gleichem Abstand nebeneinander.

- (a) Welches Doppelverhältnis haben diese vier Punkte?  
 (b) Wir betrachten jetzt konkret die Punkte

$$(1;2;2), \quad (1;3;3), \quad (1;4;4), \quad (1;5;5)$$

Berechnen Sie die Zentralprojektion dieser Punkte und überprüfen Sie, dass sich das Doppelverhältnis tatsächlich nicht geändert hat.

**Aufgabe 7.** Wir betrachten das folgende Spiel: Ein Paar möchte sich treffen. Der Mann möchte am liebsten ins Stadion (s), und die Frau in die Oper (o). Da sich Beide noch nicht geeinigt haben und leider die Handy-Akkus nicht mehr durchgehalten haben, müssen nun Beide unabhängig voneinander entscheiden, wo sie hingehen. Wir haben das folgende Spiel:

	s	o
s	4;2	0;0
o	0;0	2;3

- (a) Welches sind Nash-Gleichgewichte (des reinen Spiels)?  
 (b) Welches zusätzliche Nash-Gleichgewicht hat die gemischte Erweiterung? Was ist der Auszahlungswert dieses Gleichgewichts?