Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen

1. Übung

Abgabe: Montag, 14.04.2014, bis 10:00 Uhr
(in den obersten rechten Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Anmeldung zu den Übungen
Für die Teilnahme an den Übungen müssen Sie sich anmelden, bis spätestens Donnerstag, den 10.04.2014. Die Anmeldung erfolgt online, auf der **Veranstaltungshomepage** (auch zu finden auf den Seiten des Lehrstuhls Kawohl unter „Lehre“):
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html

Aufgabe 1:
Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} w(x)\,dx \;=\; \int_{\partial\Omega} w(x)\cdot\nu(x)\,dS(x).$$

Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Rand von der Klasse C^1, $w = (w_1, \ldots, w_n) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Funktion, $\operatorname{div} w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} w_i$ die Divergenz von w, $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ die äußere Normale an $\partial\Omega$, und „$\cdot$“ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. (Falls Ihnen der Satz nicht oder nicht mehr geläufig ist, wäre es gut, wenn Sie ihn in einem Lehrbuch oder Ihrem Analysis-Skript nachschlagen, da er in der Vorlesung öfter gebraucht wird.) Folgern Sie daraus:

(a) $\int_\Omega u_{x_i}(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\nu_i(x)dS(x), \quad i = 1, \ldots, n,$

(b) $\int_\Omega u_{x_i}(x)v(x)dx = -\int_\Omega u(x)v_{x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)dS(x), \quad i = 1, \ldots, n,$

für beliebige C^1-Funktionen $u, v : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, wobei $u_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i} u$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei f eine rotationssymmetrische Funktion $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, d.h. es existiert eine Funktion $\tilde{f} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = \tilde{f}(|x|)$ gilt, wobei

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Leiten Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\tilde{f}$ her, die zur Gleichung $\Delta f = 0$ äquivalent ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_{xx} - u_{yy} = f \quad \text{auf } \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

mit einer rechten Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Gestalt von (1) in den Koordinaten

$$(s,t) = (x+y, x-y),$$

also die entsprechende Gleichung für die Funktion $(s,t) \mapsto v(s,t)$, die durch die Gleichung $v(x+y, x-y) = u(x,y)$ für alle x, y bestimmt ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Paar von Funktionen $g, h \in C^2(\mathbb{R})$ durch

$$u(x,y) = g(x-y) + h(x+y) \tag{2}$$

eine Lösung liefert zu

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass sich jedes $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, das (3) erfüllt, schreiben lässt wie in (2).

(8 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html