**Prof. Dr. B. Kawohl** **SS 2014**
**PD Dr. S. Krömer**

# Partielle Differentialgleichungen

## 2. Übung

**Abgabe: Dienstag, 22.04.2014, bis 10:00 Uhr**
(Ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

**Aufgabe 1:**
Schlagen Sie den Transformationssatz (für Integrale auf Gebieten im $\mathbb{R}^n$) nach. Wenden Sie ihn dann an, um das Volumen des (offenen) Kreiskegels $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Höhe $h > 0$ und Basis mit Radius $R > 0$ zu bestimmen. $K$ ist demnach gegeben durch

$$K := \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, z \in (0, h),\ x^2 + y^2 < \frac{R^2}{h^2} z^2 \right\},$$

und für die Integration verwendet man sinnvollerweise Zylinderkoordinaten.

**(3 Punkte)**

**Aufgabe 2:**
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\eta(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases}$$

zur Klasse $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gehört (also eine $C^\infty$-Funktion mit kompaktem Träger ist).
**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst für die Funktion $\gamma(r) := e^{\frac{1}{r^2-1}}$, dass ihre $k$-te Ableitung die Gestalt

$$\gamma^{(k)}(r) = \frac{P_k(r)}{(r^2-1)^{2k}} e^{\frac{1}{r^2-1}}$$

mit einem Polynom $P_k$ hat.

**(3 Punkte)**

**Aufgabe 3:**
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + b \cdot Du(x,t) + cu(x,t) &= 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u(x,0) &= g(x) \text{ auf } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Hierbei sind $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0,T)$, und die Konstanten $T > 0$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ sowie die Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ werden als gegeben betrachtet.
Berechnen Sie eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,T))$.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 4:**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ heißt *subharmonisch*, falls

$$-\Delta u \leq 0$$

gilt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sei $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch. Dann gilt für alle $r > 0$ und $x \in \Omega$ mit $B(x,r) \subset \Omega$:

$$\fint_{B(x,r)} u(y)dy \geq u(x)$$

**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion $v(r) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$ monoton steigend ist.

(b) Sei $\Omega$ beschränkt, $u \in C^2(\Omega)$ subharmonisch und stetig fortsetzbar auf $\overline{\Omega}$. Dann gilt $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.

**Hinweis:** Nehmen Sie an, das Maximum wird im Inneren angenommen. Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass in diesem Falle $u$ konstant in jeder noch in $\Omega$ enthaltenen Kugel um diesen Punkt ist.

**(6 Punkte)**

**Aufgabe 5:**
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion mit

$$f(a) \leq 0 \text{ für } a < 0; \; f(a) \geq 0 \text{ für } a > 0.$$

Zeigen Sie: $u \equiv 0$ ist die einzig mögliche Lösung in $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Hinweis:** Verwenden Sie das Maximumprinzip von Aufgabe 4(b).

**(3 Punkte)**

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
**http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html**