Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen
3. Übung

Abgabe: Montag, 28.04.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1: (Glättung durch Faltung)
Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\eta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$\eta(x) = 0 \quad \text{für alle } |x| \geq 1.$$

Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ (d.h. $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^N$) definiert man die Faltung $u * \eta$ durch

$$(u * \eta)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x - y)\eta(y)\, dy.$$

Zeigen Sie:

(a) $(u * \eta)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)\eta(x - y)\, dy = (\eta * u)(x)$.

(b) $u * \eta \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

(c) $\eta \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad \Longrightarrow \quad u * \eta \in C^k(\mathbb{R}^N)$ und $D^j(u * \eta) = u * (D^j\eta)$ für $1 \leq j \leq k$.
Hinweis: Es genügt, wenn Sie den Fall $k = 1$ betrachten; der Rest folgt induktiv.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten den Streifen $\Omega := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie durch den Ansatz $u(x_1, x_2) = v(x_1) \cdot w(x_2)$ eine klassische Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x_1, -\pi) = u(x_1, \pi) = e^{x_1} & x_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ist die Lösung eindeutig?

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie: Sind $a_1, ..., a_n, c \in C(\Omega)$ mit

$$c(x) < 0 \text{ für alle } x \in \Omega,$$

so ist $u \equiv 0$ die einzige Lösung in $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ von

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\partial_k u(x) + c(x)u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Hinweis: Angenommen, es gibt ein $x_0 \in \Omega$ mit $\max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0)$. Was folgt für $Du(x_0)$ und $D^2u(x_0)$?

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei Ω der Kreisausschnitt $\Omega := \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \theta < \frac{5}{4}\pi\right\}$.

(a) Bestimmen Sie neben $u \equiv 0$ eine weitere harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$, die den Wert 0 auf $\partial\Omega \setminus \{0\}$ annimmt.
Hinweis: Betrachten Sie u in Polarkoordinaten: $\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, und machen Sie den Ansatz $\tilde{u}(r,\theta) = v(r)w(\theta)$. Sie können verwenden, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten gegeben ist durch $\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

(b) Nach dem Maximumprinzip aus der Vorlesung nehmen harmonische Funktionen ihr Maximum auf dem Rand an. Wie verhält es sich mit u?

(6 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html