Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen

4. Übung

Abgabe: Montag, 05.05.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und

$$L^2(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ messbar}, \|u\|_{L^2} < \infty\},$$

wobei

$$\|u\|_{L^2} := \Big(\int_\Omega u^2(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner seien $v, w \in L^2(\Omega)$ zwei Treppenfunktionen (messbare Funktionen, die nur endlich viele Werte annehmen):

$$v = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}, \quad w = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{F_j}$$

mit Werten $a_k, b_j \in \mathbb{R}$ und den charakteristischen Funktionen von messbaren Mengen $E_k, F_j \subset \Omega$ ($\chi_E(x) = 1$ für alle $x \in E$, und 0 für alle anderen). Zeigen Sie dafür die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega v(x)w(x)\, dx \leq \|v\|_{L^2} \|w\|_{L^2}\,.$$

Verwenden Sie dazu für den Fall $n = m$ und $E_k = F_k$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in $\mathbb{R}^n$, und führen Sie den allgemeinen Fall darauf zurück.
Bemerkung: Da sich messbare Funktionen immer durch geeignete Treppenfunktionen approximieren lassen, kann man zeigen, dass dies auch für beliebige $v, w \in L^2$ stimmt.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge harmonischer Funktionen auf Ω.

(a) $\{u_k\}_k$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen eine Funktion u. Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.
Hinweis: Mittelwerteigenschaft

(b) Sei $\{u_k\}_k$ monoton wachsend und $\{u_k(x_0)\}_k$ für ein $x_0 \in \Omega$ beschränkt. Zeigen Sie, dass für jedes zusammenhängende $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ mit $x_0 \in \tilde{\Omega}$ gilt: $\{u_k\}_k$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion u in $\tilde{\Omega}$.
Hinweis: Harnacksche Ungleichung

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 3:
In der Vorlesung wurde als Green-Funktion für die Einheitskugel $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi\left(|x|y - \frac{x}{|x|}\right)$$

angegeben, wobei Φ die aus der Vorlesung bekannte Fundamentallösung des Laplace-Operators im $\mathbb{R}^n$ ist. (Die explizite Darstellung von Φ spielt hier keine Rolle, sondern nur einige Eigenschaften.)

(a) Zeigen Sie, dass G tatsächlich die Green-Funktion ist.

(b) Leiten Sie im Fall $n = 2$ aus dieser Darstellung die ebenfalls in der Vorlesung angegebene Poisson-Formel

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{2\pi} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dS(y)$$

für die Lösung u des Dirichlet-Problems $\Delta u = 0$ auf $B(0,1)$ mit durch $g \in C(\partial B(0,1))$ gegebenen Randwerten her.

(2+3=5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega := B(0,r)$ eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine auf Ω harmonische Funktion, die keine negativen Werte auf $\partial\Omega$ annimmt.
Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonschen Formel aus der Vorlesung, dass für alle $x \in \Omega$ gilt:

$$r^{n-2} \frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}} u(0) \quad .$$

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html