Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen

5. Übung

Abgabe: Montag, 12.05.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta_x u = 0$$

(a) Zeigen Sie, dass dann auch

$$v(x, t) := x \cdot D_x u(x, t) + 2tu_t(x, t)$$

eine Lösung der Gleichung ist.

(b) Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so erfüllt auch $w(x, t) := u(x, t)e^{ct}$ wieder eine partielle Differentialgleichung, die autonom ist in dem Sinne, dass x und t nur als Argument von w und dessen Ableitungen vorkommen. Welche Differentialgleichung ist das?

(3+2=5 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie

$$\int_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} d(s, y) = 4$$

wobei

$$E(1) = \left\{(-s, y) \mid s > 0, y \in \mathbb{R}^n \text{ und } \frac{1}{(4\pi s)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4s}} \geq 1\right\}$$

Hinweis: Führen Sie zunächst die Integration nach $r = |y|$ durch. Bringen Sie dann das verbleibende Integral nach s durch eine geeignete Substitution in eine Form, die $\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)$ enthält. Eigenschaften der Gamma-Funktion sind: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$; $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ und die Oberfläche der Einheitssphäre lässt sich mit Hilfe der Gamma-Funktion ausdrücken.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ gilt:

$$\frac{1}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy \to 0$$

für $t \to 0$.
Bemerkung: Diese Aussage wird im Beweis des Satzes zur Lösung des Cauchyproblems mittels der Fundamentallösung in der Vorlesung verwendet.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes $u(t,x) = v(t)w(x)$ Lösungen des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{1}$$

für geeignete g. Wie lautet die Lösung von (1) für $g(x) = \sin(3x) + \sin(4x)$?

(b) Sei nun $g(x)$ durch eine auf $[0,\pi]$ gleichmäßig absolut konvergente Reihe der Form

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)$$

gegeben (eine sog. Fourierreihe). Bestimmen Sie eine formale Lösung $u(x,t)$ von (1) in Form einer Reihe (formal in dem Sinne, dass Sie Ableitungen und Grenzwert vertauschen können, ohne das zu begründen). Zeigen Sie deren gleichmäßige Konvergenz auf $[0,\pi] \times [0,\infty)$.
Bemerkung: Ähnlich kann auch lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihen zu u_t und u_{xx} in $(0,\pi) \times (0,\infty)$ gezeigt werden, womit man das formale Argument rechtfertigen kann. Es folgt, dass u eine klassische Lösung von (1) ist.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html