Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen

6. Übung

Abgabe: Montag, 19.05.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Ist $u \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta_x u = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega,\ t > 0,$$

und fließt durch den Rand von Ω Wärme weder zu noch ab, d.h.

$$\nu \cdot \nabla_x u = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega,\, t > 0,$$

wobei $\nu = \nu(x)$ den äußeren Normalenvektor zu $\partial\Omega$ an der Stelle $x \in \partial\Omega$ bezeichnet, so erwartet man, dass die Gesamtwärme in Ω erhalten bleibt. Zeigen Sie das:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\,dx = 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie für jedes $s > 0$ und jede stetige Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Lösung $u(x,t;s)$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t;s) - u_{xx}(x,t;s) = 0, & t > s, x \in (0,\pi), \\ u(0,t;s) = u(\pi,t;s) = 0, & t > s, \\ u(x,s;s) = g(s)\sin(x), & x \in (0,\pi). \end{cases} \tag{1}$$

(b) Geben Sie mit nun mit Hilfe von (a) eine Lösung des inhomogenen Problems

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = g(t)\sin(x), & t > 0, x \in (0,\pi), \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ v(x,0) = 0, & x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{2}$$

an. Weisen Sie nach, dass diese tatsächlich (2) löst.

(2+4=6 Punkte)

Aufgabe 3:
Formulieren Sie unter geeigneten Voraussetzungen einen Satz zur Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems zur Wärmeleitungsgleichung für $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ und beweisen Sie ihn. Verwenden Sie dazu ein Maximumprinzip aus der Vorlesung.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ die Gleichung

$$-y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - x^2 u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0 \tag{3}$$

Schreiben Sie (3) in Polarkoordinaten um, d.h. bestimmen Sie eine Gleichung für $\tilde{u}(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, die zu (3) äquivalent ist.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html