Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen

7. Übung

Abgabe: Montag, 26.05.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Sei $T > 0$ und $u \in C^{2,1}((0,1) \times (0,T)) \cap C([0,1] \times [0,T])$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0 \qquad \text{auf } (0,1) \times (0,T)$$

Es gelte: $u(0,T) > 0$, $u(1,T) > 0$ und $u(x,T) < 0$ für ein $x \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass u auf dem parabolischen Rand

$$P := (\{0\} \times [0,T]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0,T])$$

mindestens zwei Nullstellen hat.
Bemerkung: Tatsächlich gilt sogar, dass die Anzahl der Nullstellen einer Lösung u auf $\bar{I} \times T$ immer nach oben durch die Anzahl der Nullstellen von u auf P beschränkt ist. Bei der Aufgabe handelt es sich um einen einfacheren Spezialfall.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, und u sei eine hinreichend glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Dirichletrandwerten, also

$$u_t - \Delta_x u = 0 \;\text{ in } \Omega \times (0,\infty), \quad u = 0 \;\text{ auf } (\partial\Omega) \times (0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass für jedes feste $2 \leq p < \infty$

$$t \mapsto \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x,t)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

monoton fallend ist. Weisen Sie dazu zunächst nach, dass für alle differenzierbaren Funktionen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ auch $t \mapsto |f(t)|^p$ und $x \mapsto |v(x)|^{p-2} v(x)$ differenzierbar sind, mit $\frac{d}{dt}(|f(t)|^p) = p|f(t)|^{p-2} f(t) \frac{df}{dt}(t)$ und $\frac{\partial}{\partial x_i}(|v(x)|^{p-2} v(x)) = (p-1)|v(x)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x_i} v(x)$, und untersuchen Sie dann

$$\frac{d}{dt}(\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)})^p = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left(|u(x,t)|^p\right) \, dx.$$

Bemerkung: Die Monotonie gilt auch für $1 < p < 2$, mit einigen zusätzlichen Komplikationen im Beweis.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } (0,\pi) \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sin(jx) & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \sin(jx) & x \in (0,\pi) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, und für jedes $t \in \mathbb{R}$ habe $u(\cdot,t)$ kompakten Träger.

(a) Für $t \in \mathbb{R}$ sei die Energie $E(t)$ von u definiert durch

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u_t(x,t)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |D_x u(x,t)|^2 dx$$

Zeigen Sie: Ist u Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - \Delta_x u = 0$, dann ist E konstant.

(b) Definieren Sie eine Energie $\tilde{E}(t)$, die konstant ist, falls u die Gleichung

$$u_{tt} - \Delta_x u + u = 0$$

löst.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html