Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen

8. Übung

Abgabe: Montag, 02.06.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$, mit Anfangsdaten $u(x,0) = g(x)$, $u_t(x,0) = h(x)$, wobei sowohl g als auch h Träger in $[-r,r]$ für ein $r > 0$ haben, also $\operatorname{supp} g \cup \operatorname{supp} h \subset [-r,r]$.

(a) Zeigen Sie für alle $t > 0$: $\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset [-r-t, r+t]$.

(b) Zeigen Sie, dass es $T > 0$ gibt, so dass für alle $t \geq T$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)^2 dx.$$

Hinweis: Nach der d'Alembert-Formel gilt

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= F(x+t) - G(x-t), \\ u_x(x,t) &= F(x+t) + G(x-t), \end{aligned}$$

mit $F = \frac{1}{2}(g' + h)$, $G = \frac{1}{2}(g' - h)$.

(2+3=5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei u die Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

mit Funktionen $g \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$ (das „c“ im Index heißt: g und h haben kompakten Träger; es gibt also $R > 0$, so dass $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$). Zeigen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel: Es gibt eine Konstante C, so dass

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3 \text{ und alle } t > 0.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $n \geq 2$, $a \in (0, n-1)$ und $B := B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel. Wir betrachten die Funktionen $u(x) = |x|^{-a}$ und $v_j(x) := -ax_j|x|^{-a-2}$ auf B.

(a) Zeigen Sie: $u, v_j \in L^1(B) \subset L^1_{\text{loc}}(B)$.

(b) Zeigen Sie: v_j ist schwache partielle Ableitung von u bezüglich x_j.

(c) Für welche a, p gilt $v_j \in L^p(B)$ (und damit $u \in W^{1,p}(B)$)?

Hinweis: Einige Rechnungen kan man sich sparen, wenn man ausnutzt, dass

$$v_j \in L^p(B) \text{ für ein } j \;\Leftrightarrow\; v_j \in L^p(B) \text{ für alle } j \;\Leftrightarrow\; \textstyle\sum_j |v_j| \in L^p(B) \;\Leftrightarrow\; w \in L^p(B),$$

wobei $w(x) := |x|^{-a-1}$.

(1+3+1=5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $C > 0$, so dass für alle $u \in C^1(I)$ gilt:

$$\|u\|_\infty \leq C(\|u\|_1 + \|u'\|_1)$$

(b) Es gibt $C > 0$, so dass für alle $u \in C^1(I)$ mit $u(a) = 0$ gilt:

$$\|u\|_2 \leq C\|u'\|_2$$

Dabei ist $\|v\|_p = \left(\int_I |v|^p\right)^{1/p}$ (auch für $p = 1$) und $\|v\|_\infty = \sup_I |v|$.
Hinweis zu (b): Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\int_a^b v(t)dt \leq (b-a)^{\frac{1}{2}}\|v\|_2.$$

(3+2=5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html