**Prof. Dr. B. Kawohl** **SS 2014**
**PD Dr. S. Krömer**

**Partielle Differentialgleichungen**

**9. Übung**

**Abgabe: Montag, 16.06.2014, bis 10:00 Uhr**
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

**Aufgabe 1:**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $A$ eine Matrix mit Einträgen $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Ferner sei $a_0(x) \geq 0$, und es gebe ein $\gamma > 0$ so dass für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j \in \{1,\dots,n\}} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2.$$

Wir definieren $E : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$E(v) = \int_\Omega \left( \sum_{i,j \in \{1,\dots,n\}} a_{i,j}(x)\partial_i v(x)\partial_j v(x) + a_0(x)v(x)^2 - 2f(x)v(x) \right) dx$$

(a) Zeigen Sie: Für alle $v, w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $t \in (0,1)$ gilt:

$$\|D(v-w)\|_2 > 0 \implies E((1-t)v + tw) < (1-t)E(v) + tE(w)$$

(b) Folgern Sie aus (a): Sind $u$ und $\tilde{u}$ Minima von $E$, dann gilt $\|D(u-\tilde{u})\|_2 = 0$.
**Bemerkung:** Wegen $u, \tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (also in gewissem Sinne $u = \tilde{u} = 0$ auf $\partial\Omega$) folgt insbesondere $u = \tilde{u}$ fast überall, das heißt, $E$ hat nur ein Minimum.

**(3+2=5 Punkte)**

**Aufgabe 2:**
Für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \{1, ..., n\}$ sei $\tau_k^h(x) := x + he_k$ die Translation um $h$ in die $k$-te Richtung und

$$D_k^h u := \frac{1}{h}(u \circ \tau_k^h - u)$$

der Differenzenquotient. Zeigen Sie

(a) (Partielle Integration) Für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D_k^h u)v = -\int_{\mathbb{R}^n} u(D_k^{-h} v)$$

(b) (Produktregel) Für $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$D_k^h(uv) = uD_k^h v + (D_k^h u)(v \circ \tau_k^h)$$

**(2+2=4 Punkte)**

**Aufgabe 3:**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $k \in \{1, ..., n\}$, $1 \leq p < \infty$ und $u \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $\operatorname{supp} u \subset U \subset\subset \Omega$ (also insbesondere $d := \operatorname{dist}(U, \partial\Omega) > 0$). Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < d$ (dann ist der Differenzenquotient $D_k^h u \in C_0^\infty(\Omega)$ definiert). Zeigen Sie:

$$\|D_k^h u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|D_k u\|_{L^p(U)}$$

**Bemerkung:** Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt, folgt die Behauptung nun auch für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} u \subset U$.
**Hinweis:** Den Differenzenquotienten kann man als Integral über Ableitungen schreiben. Sie dürfen zudem die *Höldersche Ungleichung* verwenden: Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_U v(x)w(x) \leq \|v\|_{L^p(U)} \|w\|_{L^q(U)}$$

für alle $v \in L^p(U)$, $w \in L^q(U)$, wobei $q = \frac{p-1}{p}$ (also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $q = +\infty$, falls $p = 1$). Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $L^2$ ist ein Spezialfall; einen Beweis der Höldersche Ungleichung finden Sie z.B. im Buch „Partial Differential Equations“ von L.C. Evans in Appendix B.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 4:**
Sei $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig ist. Dabei dürfen Sie verwenden, dass $L^p(\Omega)$ vollständig ist. Sei also $(u_n)$ Cauchy-Folge in $W^{1,p}(\Omega)$; zeigen Sie die Konvergenz von $(u_n)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ in folgenden Teilschritten:

(a) Es existieren $u, v_k \in L^p(\Omega)$, so dass $\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$ und $\|\partial_k u_n - v_k\|_{L^p} \to 0$, wobei $\partial_k u_n$ die schwache partielle Ableitung von $u_n$ in Richtung $x_k$ bezeichnet ($k = 1, \ldots, n$).

(b) $u$ ist schwach differenzierbar, mit $\partial_k u = v_k$ fast überall in $\Omega$.
**Hinweis:** Dies folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$; die Konvergenz gewisser Integrale lässt sich hier elegant mit der Hölderschen Ungleichung zeigen, die Sie verwenden dürfen ($U = \Omega$ im Hinweis zu Aufgabe 3).

(c) $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0$.

**(2+2+2=6 Punkte)**

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
**http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html**