Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer **SS 2014**

Partielle Differentialgleichungen
10. Übung

Abgabe: Montag, 23.06.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einträgen $a_{j,k}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt $\xi \cdot A\xi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{j,k}\xi_j\xi_k \geq \theta|\xi|^2$.

(ii) Alle Eigenwerte von A sind größer oder gleich θ.

Verwenden Sie dazu, dass $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A hat, oder zeigen Sie zuerst direkt, dass $\mu_1 := \inf_{|\xi|=1}[\xi \cdot A\xi]$ ein Eigenwert ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Zur Erinnerung: Die Gleichung zweiter Ordnung

$$\sum_{j,k\in\{1,\dots,n\}} a_{j,k}(x)u_{x_j,x_k}(x) + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} b_j(x)u_{x_j}(x) + c(x)u(x) = 0$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (wobei $a_{j,k}$, b_j und c Abbildungen $\Omega \to \mathbb{R}$ sind) heißt elliptisch, falls es $\theta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{j,k\in\{1,\dots,n\}} a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \geq \theta|\xi|^2$$

Welche der folgenden Gleichungen sind elliptisch?

(a) $u_{tt} - u_{xx} = 0$ (auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

(b) $u_t - u_{xx} = 0$ (auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

(c) $4(xu_{xx} - xu_{xy} + yu_{xy} + yu_{yy}) + yu_{xx} + xu_{yy} = 0$ (für $(x, y) \in (\varepsilon, \infty)^2$, wobei $\varepsilon > 0$)

Natürlich sind die Antworten zu beweisen.

(2+2+2=6 Punkte)

Aufgabe 3: (Alternativer Existenzbeweis für Lösungen elliptischer Gleichungen)
Für $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ sei

$$\begin{aligned} Q(u,v) &:= \int_\Omega \left(\sum_{j,k} \frac{1}{2} a_{j,k}(x) D_j u(x) D_k v(x) + \frac{1}{2} a_0(x) u(x) v(x) \right) dx, \\ G(v) &:= \int_\Omega f v \quad , \end{aligned}$$

mit $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $a_{j,k} = a_{k,j} \in L^\infty(\Omega)$.

(a) Zeigen Sie:

$$Q\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{2}F(u) + \frac{1}{2}F(v) - F\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

mit $F(w) := Q(w,w) - G(w)$.

Hinweis: Die konkrete Form von G und Q spielt dafür keine Rolle, sondern nur, dass G linear und Q bilinear ist.

(b) Es existiere $c > 0$ mit $Q(u,u) \geq c\|u\|^2_{W^{1,2}}$ für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, womit insbesondere $I := \inf_{v \in W_0^{1,2}(\Omega)} F(v) > -\infty$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Jede Minimalfolge zu F, d.h. jede Folge $(u_n)_n$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $F(u_n) \to I$, ist Cauchy-Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (also Cauchy bezüglich $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$, was auch die Norm von $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist).

Bemerkung: Als Konsequenz von (b) hat $(u_n)_n$ einen Limes u^* in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (Konvergenz bzgl. der Norm, nicht nur schwach), der wegen der Stetigkeit von F auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ ein Minimierer von F ist, und damit auch schwache Lösung von $-\sum_{j,k} \partial_k(a_{j,k}\partial_j u) + a_0 u = f$.

(2+3=5 Punkte)

Aufgabe 4:
Seien $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete und $\Psi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus, und für alle $y \in \tilde{\Omega}$ gelte $\det D\Psi(y) = 1$. Sei $u \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\tilde{u} := u \circ \Psi \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\tilde{\Omega})$. Es gelte $Lu = f$ im schwachen Sinne, wobei

$$Lv = -\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{j,k} v_{x_j})_{x_k} + a_0 v$$

mit $a_{j,k} \in C^1(\Omega)$, $a_0 \in C(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie: $\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f}$ im schwachen Sinne, wobei

$$\tilde{L}v = -\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\tilde{a}_{j,k} v_{y_j})_{y_k} + \tilde{a}_0 v$$

mit $\tilde{a}_0 = a_0 \circ \Psi$, $\tilde{f} = f \circ \Psi$ und

$$\tilde{a}_{j,k}(y) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_{r,s}(\Psi(y)) \left((D\Psi(y))^{-1}\right)_{j,r} \left((D\Psi(y))^{-1}\right)_{k,s}$$

Hinweis: Transformationsformel für Integrale.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html