Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen
11. Übung

Abgabe: Montag, 30.06.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Auf $\Omega := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \frac{5}{4}\pi\right\}$ betrachten wir das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := \tilde{u}(r,\varphi) := r^{\frac{4}{5}}\sin(\tfrac{4}{5}\varphi)$$

harmonisch ist. Für welches g erfüllt u das Randwertproblem (1)?

(b) Zeigen Sie für dieses u: $u \in W^{1,2}(\Omega)$, aber $u \notin W^{2,2}(\Omega)$.

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten weiterhin (1). Es existiere eine Funktion $h \in W^{2,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, für die $h = g$ auf $\partial\Omega$ gilt. Dann kann die Inhomogenität in der Randbedingung des Problems (1) in eine Inhomogenität in der Gleichung eines neuen Problems

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

überführt werden, wobei $v = u - h$ und $f = \Delta h$ gesetzt wird.
Für g aus Aufgabe 1(a) kann man z.B. wählen:

$$h(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := \tilde{h}(r,\varphi) := e^{1-\frac{1}{r^2}}\sin\left(\tfrac{4}{5}\varphi\right)$$

Zeigen Sie für dieses h sowie u und g aus Aufgabe 1(a):

(a) $h \in W^{2,2}(\Omega)$ (und folglich $f = \Delta h \in L^2(\Omega)$),

(b) $v \notin W^{2,2}(\Omega)$.

(c) Warum ist Satz 5 ($W^{2,2}$-Regularität am Rande) aus der Vorlesung in diesem Fall nicht anwendbar?

(4+1+1=6 Punkte)

Aufgabe 3:
Für $-\infty < a < b < \infty$ betrachten wir den reellen Hilbertraum $L^2((a,b))$ mit Skalarprodukt

$$\langle h, g\rangle := \int_a^b h(x)g(x)dx.$$

Ferner sei die Folge $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2((a,b))$ ein *vollständiges Orthonormalsystem*, d.h.,

(i) $\langle e_k, e_j\rangle := \int_a^b e_k(x)e_j(x)dx = \delta_{kj}$ für $k, j \in \mathbb{N}$ (wobei $\delta_{kj} := 1$ für $k = j$, und 0 sonst);

(ii) für alle $f \in L^2((a,b))$ gibt es eine Folge reeller Zahlen (γ_k) so dass

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \gamma_k e_k =: \sum_{k=1}^\infty \gamma_k e_k \quad \text{(Konvergenz in } L^2\text{, d.h. } \Big\|f - \sum_{k=1}^n \gamma_k e_k\Big\|_{L^2} \to 0)$$

Zeigen Sie:

(a) (Stetigkeit des Skalarprodukts) Für konvergente Folgen (h_n), (g_n) in $L^2((a,b))$ mit $h_n \to h,\ g_n \to g$ (Konvergenz in L^2) gilt $\langle h_n, g_n\rangle \to \langle h, g\rangle$ in $\mathbb{R}$.

(b) $\gamma_k = \langle f, e_k\rangle\ \forall k \in \mathbb{N}$.

(c) (Parsevalsche Gleichung) $\|f\|_{L^2}^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty \langle f, e_k\rangle^2$.

(d) $\langle e_k, e_j\rangle \to 0$ für $k \to \infty$, für beliebiges (aber festes) j.

(e) $e_k \rightharpoonup 0$ für $k \to \infty$ in $L^2((0,\pi))$, d.h. $\langle e_k, g\rangle \to 0$ für jedes $g \in L^2((0,\pi))$.

Wo wird (a) im Beweis von (b), (c) und (e) benötigt?
Bemerkung: Ein Beispiel für ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2((0,\pi))$ ist

$$e_k(x) := \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin(kx),\ k \in \mathbb{N} \ \text{ (ohne Beweis).}$$

(2+2+2+1+1=8 Punkte)

Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html

Sommerfest der Fachschaft Mathematik:
Die Fachschaft Mathematik lädt ein zum Sommerfest am Freitag, den 27.06.14 ab 16.00 Uhr auf dem Platz zwischen Hörsaalgebäude und Bibliothek. Grillgut und Getränke werden vor Ort verkauft.