Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen
12. Übung

Abgabe: Montag, 07.07.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
Wir betrachten auf einem beschränktem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit glattem Rand die Gleichung

$$-\Delta u + \partial_{x_1} u = f \tag{1}$$

mit $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von (1). Zeigen Sie:

(a) $\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(\|Du\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\Big)\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

(b) $u \in W^{2,2}(\Omega)$, und es gibt eine Konstante C (unabhängig von u und f) so dass

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\Big).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\tilde{f} := f - \partial_{x_1} u$. Aus (a) können Sie eine geeignete Abschätzung für $\|Du\|_{L^2(\Omega)}$ folgern.

(2+3=5 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u'' = x & \text{in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(a) Sei $V_{1/4} = \{v \in C([0,1]) \mid v(0) = v(1) = 0 \text{ und } v \text{ ist linear auf } [\frac{k-1}{4}, \frac{k}{4}],\ k = 1,2,3,4\}$. Finden Sie die Näherungslösung $u_{1/4} \in V_{1/4}$ von (2) mit der Methode der finiten Elemente.

(b) Lösen Sie (2) explizit und zeichnen Sie den Graphen dieser Lösung und den von $u_{1/4}$ in einem Bild.

(2+3=5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei Ω ein beschränktes polygonales Gebiet in $\mathbb{R}^N$, τ_h eine Triangulierung von Ω und $V_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_K \text{ ist linear } \forall\ K \in \tau_h\}$. Zeigen Sie, dass $V_h \subset W^{1,2}(\Omega)$ gilt.
Hinweis: Sie müssen schwache Differenzierbarkeit nachweisen. Der Satz von Gauss gilt auf jedem $K \in \tau_h$; der äußere Normalenvektor ist zwar nur in den Hyperflächen von ∂K definiert, aber der Rest ist für das Oberflächenintegral vernachlässigbar (Ecken, Kanten usw.).

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes polygonales Gebiet, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und τ_h eine Triangulierung von Ω. Wir definieren v_h als diejenige stetige Funktion, die in jedem Dreieck $K \in \tau_h$ affin ist, und an den drei Ecken von K mit u übereinstimmt. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine ausreichend feine Triangulierung (also h klein genug, abhängig von ε und u) existiert, so dass $\|u - v_h\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \varepsilon$.
Bemerkung: Ähnlich kann man auch für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \neq 2$, argumentieren. Wenn zudem $C^2(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{1,2}(\Omega)$ bzgl. der $W^{1,2}$-Norm liegt (dafür genügt, dass Ω die sogenannte Segmenteigenschaft besitzt – siehe das Buch "Sobolev Spaces" von R.A. Adams), so folgt, dass alle $W^{1,2}$-Funktionen durch lineare finite Elemente bzgl. der $W^{1,2}$-Norm beliebig gut approximiert werden können.

(5 Punkte)

Anmeldung zur Klausur

Bis zum 17.7. können Sie sich zur Klausur am 24.7.2014 anmelden. Für die Nachklausur gibt es später eine eigene Anmeldephase. Alle Details dazu finden Sie auf der **Veranstaltungs-homepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html

Für die Teilnahme an der Klausur ist das Erreichen von mindestens 120 Übungspunkten nötig. Am 7.7. erscheint ein Bonusblatt, bei dem Sie weitere 20 Punkte erreichen können, falls Sie die Hürde mit dem 12. Blatt noch nicht geschafft haben. Altzulassungen sollten Sie wie auf der Veranstaltungshomepage beschrieben möglichst sofort melden; auch in diesem Fall müssen Sie sich aber noch wie alle anderen zur Klausur anmelden.