Prof. Dr. B. Kawohl **SS 2014**
PD Dr. S. Krömer

Partielle Differentialgleichungen

Bonusübung

Abgabe (freiwillig): Montag, 14.07.2014, bis 10:00 Uhr
(ins Fach oben rechts im Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum des MI)

Aufgabe 1:
In der Vorlesung (Satz 8) wurde im Wesentlichen folgende Aussage gezeigt:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, und L ein elliptischer Operator der Form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + a_0 u$$

mit auf $\overline{\Omega}$ stetigen Koeffizienten $a_{i,j}$, b_i und a_0; $a_0 \geq 0$ in Ω und $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$, $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ mit $\theta > 0$. Dann gilt für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$:

$$Lu \leq 0 \text{ in } \Omega,\ u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \geq 0 \text{ für ein } x_0 \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad u = u(x_0) \text{ in } \overline{\Omega}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe eines konkreten Gegenbeispiels, etwa für $n = 1$, dass man auf die Voraussetzung $a_0 \geq 0$ nicht verzichten kann.

(b) Seien die Voraussetzungen bis auf $a_0 \geq 0$ erfüllt und sei $u \leq 0$. Zeigen Sie:

$$Lu \leq 0 \text{ in } \Omega,\ u(x_0) = 0 \text{ für ein } x_0 \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad u = 0 \text{ in } \overline{\Omega}.$$

Hinweis: $a_0(x) = \max\{0, a_0(x)\} + \min\{0, a_0(x)\}$.

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes, beschränktes, glatt berandetes Gebiet mit $0 \in \Omega$. Für die äußere Normale $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ und für alle $x \in \partial\Omega$ gilt dann $x \cdot \nu(x) > 0$. Beweisen Sie folgende Aussage: Falls $n > 2$, $\lambda > 0$ und $q \geq \frac{n+2}{n-2}$ ist, so kann das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^q & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

keine nichttriviale Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ besitzen.

Anleitung: Angenommen, u ist nichttriviale Lösung (also $u \not\equiv 0$). Zeigen Sie nun:

(a) $u > 0$ in Ω.

(b) Für $x \in \partial\Omega$: $(x \cdot \nabla u(x))(\nabla u(x) \cdot \nu(x)) = (x \cdot \nu(x))|\nabla u(x)|^2$.

(c) $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \lambda \int_\Omega u^{q+1} \, dx$.

(d) $(1 + q) \int_\Omega u^q (x \cdot \nabla u) \, dx = -n \int_\Omega u^{q+1} \, dx$.

(e) Wenden Sie den Gaußschen Satz auf $F(x) = (x \cdot \nabla u(x))\nabla u(x) - \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 x$ an, und folgern Sie daraus einen Widerspruch.

(1+2+1+2+2=8 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir betrachten das folgende parabolische Maximumprinzip:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $\Gamma_T := (\Omega \times \{t=0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$, $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$, $a_{i,j}$ und a_0 auf $\overline{\Omega}$ stetig, $a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x)$, $\sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$ mit $\theta > 0$.
Ist $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ mit

$$u_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) u_{x_i x_j}(x,t) + a_0(x) u(x,t) > 0, \ (x,t) \in \Omega_T,$$
$$u(x,t) \geq 0, \ (x,t) \in \Gamma_T,$$

dann ist $u > 0$ in $\Omega \times (0,T]$. Zeigen Sie dies in folgenden Teilschritten:

(a) Zeigen Sie, dass für symmetrische Matrizen $A, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: Sind A und H positiv semidefinit, dann gilt Spur $(AH) \geq 0$.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst denn Fall, wenn A eine Diagonalmatrix ist, und führen Sie dann den allgemeinen Fall darauf zurück, indem Sie ausnutzen, dass die Spur invariant unter Basistransformationen ist.

(b) Beweisen Sie das oben formulierte Maximumprinzip unter der zusätzlichen Annahme, dass $a_0(x) \geq 0$ auf $\overline{\Omega}$ ist.

(c) Beweisen Sie das Maximumprinzip ohne Annahmen über das Vorzeichen von a_0.
Hinweis: Substituieren Sie $u = e^{\lambda t} v$.

(2+2+2=6 Punkte)

Anmeldung zur Klausur

Bis zum 17.7. können Sie sich zur Klausur am 24.7.2014 anmelden. Für die Nachklausur gibt es später eine eigene Anmeldephase. Alle Details dazu finden Sie auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1414SS/PDE.html

Für die Teilnahme an der Klausur ist das Erreichen von mindestens 120 Übungspunkten nötig. Die Punkte dieses Bonusblattes zählen auch.