Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc.

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

1. Übung

Abgabe: Montag, 13.10.2014, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal oder in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Anmeldung zu den Übungen

Für die Teilnahme an den Übungen müssen Sie sich anmelden, bis spätestens Donnerstag, den 9.10.2014. Die Anmeldung erfolgt online, auf der **Veranstaltungshomepage** (auch zu finden auf den Seiten des Lehrstuhls Kawohl unter „Lehre“):

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html

Aufgabe 1:

Wir betrachten die Eikonal-Gleichung

$$|u'|^2 = 1 \quad \text{in } (-1,1),$$

mit $u(-1) = u(1) = 0$. Diese lässt sich regularisieren zu

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + |u_\varepsilon'|^2 = 1 \quad \text{in } (-1,1),$$

für $\varepsilon > 0$ und mit denselben Randdaten. Wir sind an Lösungen u_ε interessiert, die achsensymmetrisch zur y-Achse sind.

(a) Bestimmen Sie eine Lösung u_ε des regularisierten Problems. Finden Sie dazu zunächst eine Lösung v_ε von

$$\begin{aligned} -\varepsilon v_\varepsilon' + v_\varepsilon^2 &= 1 \quad \text{in } (-1,1), \\ v_\varepsilon(0) &= 0, \end{aligned}$$

und schließen dann von v_ε auf u_ε.
Zur Kontrolle: $u_\varepsilon(x) = -\varepsilon \log\left(\frac{\cosh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $\{u_\varepsilon\}$ in $[-1,1]$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen $u(x) := 1 - |x|$ konvergiert.

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\Gamma := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|x_2 = 0\}$. Lösen Sie mit dem charakteristischen Verfahren:

$$\begin{aligned} u_{x_2} + c u_{x_1} &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u(x_1,x_2) &= g(x_1) \quad \text{in } \Gamma, \end{aligned}$$

mit gegebenem $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3 (freiwillige Zusatzaufgabe):
Seien $U, A \subset \mathbb{R}^3$ und $B \subset \mathbb{R}^2$ offen, $a \mapsto \psi(a)$, $A \to B$, $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ und $(x, b) \mapsto v(x; b)$, $U \times B \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbare Funktionen, und

$$u(x; a) := v(x; \psi(a)) \quad (x \in U, a \in A).$$

Prüfen Sie nach, dass

$$u_{x_i a_j}(x; a) = \sum_{k=1}^{2} v_{x_i b_k}(x; \psi(a)) \psi^k_{a_j}(a) \quad (i, j = 1, 2)$$

und folgern Sie daraus, dass

$$\det(D^2_{xa} u) = 0.$$

(keine Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html