Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M.Sc. M. Kühn

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

2. Übung

Abgabe: Montag, 20.10.2014, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Sei $\Gamma := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ und $u_0(x_1, x_2) = x_1^2$. Lösen Sie das quasilineare Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 \\ u(x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) \quad \text{für } (x_1, x_2) \in \Gamma \end{cases}$$

in einer Umgebung von Γ.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Lösen Sie mit dem charakteristischen Verfahren:

(a)

$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u \\ u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2), \end{cases}$$

wobei $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ gegeben sei.

(b)

$$\begin{cases} (x_2 + u)u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = x_1 - x_2 \\ u(x_1, 1) = 1 + x_1. \end{cases}$$

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sind $\alpha : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$, $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene, hinreichend glatte Funktionen, so haben die quasilinearen Gleichungen

$$b(x, u(x)) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{1}$$

und

$$b_\alpha(x, u(x)) \cdot Du(x) + c_\alpha(x, u(x)) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

wobei

$$b_\alpha(x, z) := \alpha(x)b(x, z) \text{ und } c_\alpha(x, z) := \alpha(x)c(x, z),$$

offensichtlich die gleichen Lösungen u. Wie spiegelt sich das in den zu (1) und (2) gehörigen charakteristischen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen wider (in denen mit Hilfe der quasilinearen Struktur p eliminiert wurde)? Die Lösungsfunktionen (x, z) und (x_α, z_α) davon sind zwar nicht mehr paarweise gleich, aber es gibt eine natürliche bijektive Beziehung zwischen ihnen. Welche ist das?
Hinweis: Verwenden Sie die eindeutig bestimmte (warum?) Lösung t von

$$\frac{dt(s)}{ds} = \alpha(x(t(s))), \quad t(0) = 0.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $\Gamma := \partial B(0,1)$ die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten für $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} -x_2 u_{x_1} + x_1 u_{x_2} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{3}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $g = c$ auf Γ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$, so hat (3) unendlich viele Lösungen.
Hinweis: Wie sehen die Charakteristiken von (3) aus?

(b) Ist y ein Punkt in Γ und U eine offene Umgebung von y im $\mathbb{R}^2$, so dass $\Gamma \cap U$ zusammenhängend und g auf $\Gamma \cap U$ nicht konstant ist, so hat (3) keine Lösung in U.

(c) Wieso widerspricht (b) nicht dem Satz über die lokale Existenz von Lösungen aus der Vorlesung?

(2+2+1=5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html