Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc. **WS 2014/2015**

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

3. Übung

Abgabe: Montag, 27.10.2014, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Sei $\Gamma = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$, und $a_1, a_2 \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beschränkte C^∞-Funktionen. Wir betrachten das lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} a_1(x)u_{x_1} + a_2(x)u_{x_2} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2, \\ u = u_0 & \text{auf } \Gamma, \end{cases}$$

mit $u_0 \in \mathbb{C}^\infty(\Gamma)$. Ferner gelte $a_2 \neq 0$ auf Γ.

(a) Zeigen Sie, dass eine Lösung u in einer Umgebung von Γ existiert.

(b) Finden Sie ein Beispiel für a_1, a_2 und u_0, so dass *keine* globale C^1-Lösung u (also auf ganz $\mathbb{R}^2$) existiert.

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 2:
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + [F(u)]_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen sie: Gilt

$$1 + tg'(x - tF'(u))F''(u) \neq 0$$

für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ mit gegebenen $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$, so ist durch

$$u(x, t) = g(x - tF'(u))$$

eine Funktion $u(x, t)$ eindeutig (implizit) definiert und eine klassische Lösung zu (1).

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Es sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$L(q,x) := \Psi(x) f(|q|) - \Phi(x),$$
wobei $f \in C^2([0,\infty))$ mit $f'(0) = 0$ und $f'' \geq \delta > 0$ auf $[0,\infty)$ für eine Konstante δ, sowie $\Phi, \Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \Psi \leq \frac{1}{\delta}$ in $\mathbb{R}^n$.

(a) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für den Minimierer x^* von
$$\int_0^T L(\dot{x}(t), x(t))\, dt, \quad x(0) = 0,\ x(T) = x_T$$
(unter allen C^2-Funktionen $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ mit gegebenem $T > 0$ und $x_T \in \mathbb{R}^n$).

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $q \mapsto D_q L(q,x)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, für jedes x bijektiv ist, und bestimmen Sie eine explizite Formel für die zur Lagrange-Funktion L gehörige Hamilton-Funktion H.

(c) Sei nun $\Phi \geq 0$ und $f(r) = r^{2k}$ ($k \in \mathbb{N}$ fest). Geben Sie H für diesen Spezialfall an, und zeigen Sie damit, dass es eine Konstante C gibt, die nur von $\dot{x}^*(0)$, $\Phi(x^*(0))$, k und δ abhängt, so dass $|\dot{x}^*| \leq C$ auf $[0,T]$.

(2+3+5=10 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html