Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc.

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

4. Übung

Abgabe: Montag, 03.11.2014, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $f \in C(\Omega)$. Zeigen sie die folgenden Aussagen.

(a) Gilt
$$\int_\Omega f v \, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega),$$
so ist $f = 0$ in Ω.

(b) Gilt
$$\int_\Omega f v_{x_i} \mathrm{d}x = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n,$$
so ist $f = c$ in Ω mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(2+3=5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $L = H^*$ die Legendre-Transformation zu H, falls $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex ist.

(a) Sei $H(p) = \frac{1}{r} |p|^r$ für $1 < r < \infty$. Zeigen Sie
$$L(q) = \frac{1}{s} |q|^s, \quad \text{wobei } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

(b) Sei $H(p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j + \sum_{i=1}^n b_i p_i$, wobei $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist. Berechnen Sie $L(q)$.

(3+3=6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Man sagt q gehört zum Subdifferential von H in p, geschrieben

$$q \in \partial H(p),$$

falls

$$H(r) \geq H(p) + q \cdot (r - p) \quad \forall r \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

$$q \in \partial H(p) \iff p \in \partial L(q) \iff p \cdot q = H(p) + L(q),$$

wobei $L = H^*$.

(3 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $L = H^*$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, und u gegeben durch die Hopf-Lax Formel

$$u(x,t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\}$$

Zeigen Sie:

(a) Wird das Minimum in y^* angenommen, gilt also $u(x,t) = tL\left(\frac{x-y^*}{t}\right) + g(y^*)$, so folgt

$$Dg(y^*) \in \partial L(q^*), \quad \text{mit } q^* := \frac{x-y^*}{t}.$$

Sie dürfen dabei zur Vereinfachung annehmen, dass L bei q^* differenzierbar ist (was aber eigentlich nicht nötig ist).

(b)
$$u(x,t) = \min_{y \in B(x,Rt)} \left\{ tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + g(y) \right\},$$

mit $R := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \sup_{q \in \partial H(Dg(y))} |q|$ (O.B.d.A. $R < \infty$).
Hinweis: Aufgabe 3.

(3+3=6 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html