**Prof. Dr. B. Kawohl**
**PD Dr. S. Krömer**
**M. Kühn, M.Sc.**

**WS 2014/2015**

## Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

## 5. Übung

**Abgabe: Montag, 10.11.2014, bis 10:00 Uhr**
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

### Aufgabe 1:

Sei $X$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zwei Normen $||.||_a$ und $||.||_b$ heißen äquivalent auf $X$, falls es Konstanten $c, C \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$c||x||_a \leq ||x||_b \leq C||x||_a$$

für alle $x \in X$. Zeigen Sie:

(a) Ist $X$ endlich-dimensional, so sind alle Normen auf $X$ äquivalent.

(b) Sind alle Normen auf $X$ äquivalent, so muss $X$ endlich-dimensional sein. Nehmen sie dazu an, dass es zu jedem Unterraum $Y$ von $X$ eine Projektion auf $Y$ gibt, man also $X = Y \oplus \operatorname{span}\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ für geeignete $e_i$ schreiben kann.

**(2+3=5 Punkte)**

### Aufgabe 2:

Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\sup_{\mathbb{R}^n} |D^2 g| < \infty$, so ist $g$ semikonkav.

(b) $g$ ist genau dann semikonkav, wenn die Abbildung $x \mapsto \frac{C}{2}|x|^2 - g(x)$ konvex ist, mit einer Konstante $C$.
Dabei dürfen Sie verwenden, dass eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn Sie $f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ erfüllt.

(c) $g$ ist genau dann konvex, wenn $D^2 g \geq 0$, also die Hessematrix von $g$ positiv semidefinit ist.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 3:** Sei $E$ eine abgeschlossene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$. Angenommen man dürfte die Hopf-Lax Formel auf das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + |Du|^2 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{auf } E \times \{t=0\} \\ u = +\infty & \text{auf } (\mathbb{R}^n \setminus E) \times \{t=0\} \end{cases}$$

anwenden. Zeigen Sie, dass man dann

$$u(x,t) = \frac{1}{4t}\,\mathrm{dist}(x,E)^2$$

erhalten würde.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 4:**
Es sei $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvexe Funktion der Klasse $C^2$, $g^1, g^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (global) Lipschitzstetig, und $u^1, u^2$ die schwachen Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} u^i_t + H(Du^i) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u^i = g^i & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \;\; (i=1,2). \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten (in $L^\infty$):

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \left|u^1(.,t) - u^2(.,t)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} \left|g^1 - g^2\right| \quad (t > 0).$$

**(5 Punkte)**

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
**http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html**