Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc.

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

7. Übung

Abgabe: Montag, 24.11.2014, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Seien $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. Verwenden Sie die Lax-Oleinik-Formel um eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t + (au+b)u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\}, \end{cases} \quad \text{mit} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

zu bestimmen.
(Wir kennen im Prinzip die Lösung, da es sich um einen Fall des in der Vorlesung behandelten Riemann-Problems handelt. In der Aufgabe geht es darum, dies mittels direkter Auswertung der Lax-Oleinik-Formel zu lösen, auch wenn es evtl. anders einfacher wäre.)

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ eine Funktion, die die Abschätzung

$$u(x+z,t) - u(x,t) \leq C\left(1 + \frac{1}{t}\right) z$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ und fast alle $x, z \in \mathbb{R}, t > 0, z > 0$ erfüllt. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty$ der Standardglätter in der x- und der t-Variable. Dieser hat im wesentlichen folgende Eigenschaften:

(1) $\eta_\varepsilon \geq 0$,

(2) $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(0)$,

(3) $\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \eta_\varepsilon(x,t) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 1$.

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\eta_\varepsilon * u)(x,t) \leq C'\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

für alle $t \geq 2\epsilon$ gilt, mit einer von ϵ unabhängigen Konstante $C' \in \mathbb{R}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Wir suchen die Entropielösung von

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x < -1, \\ 0 & \text{für} \quad -1 \leq x < 0, \\ 2 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung explizit für $0 < t < 1$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung explizit für $1 \leq t < 2$.
Hinweis: Die Lösungskurve $\{(x(t),t) | t > 1\}$ von

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2}\frac{x(t)}{t}, \quad x(1) = 2,$$

spielt eine Rolle für die Rankine-Hugoniot-Bedingung – wieso?

(c) Bei $t = 2$ ändert sich bei der Entropielösung u wieder eine Sprunglinie, die nun zur Kurve $\{(x(t),t) | t > 2\}$ wird, wobei $x(t)$ folgendes Anfangswertproblem löst:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{x(t)}{t}, \quad x(2) = 0.$$

Zeigen Sie, dass es ein $T > 2$ gibt, so dass diese Kurve bei $t = T$ auf die aus (b) trifft. Was bedeutet das für die Entropielösung u für $t > T$?

(3+4+3=10 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html