Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc.

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

8. Übung

Abgabe: Montag, 01.12.2014, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Sei $T > 0$, $w : \mathbb{R}^n \times (0, T] \to \mathbb{R}$ stetig, und w habe ein striktes lokales Maximum im Punkt (x_0, T) für ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei weiter

$$\tilde{w}(x,t) := w(x,t) - \frac{\varepsilon}{T-t} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T).$$

Zeigen Sie: Für $\varepsilon > 0$ klein genug nimmt $\tilde{w}$ ein lokales Maximum in einem Punkt $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ mit $0 < t_\varepsilon < T$ an, und man kann diese lokale Maximalstelle so wählen, dass $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \to (x_0, T)$ für $\varepsilon \to 0$.
Bemerkung: In der Vorlesung wird diese Aussage benötigt für $w = u - v$, mit einer Viskositätslösung u der Hamilton-Jacobi-Gleichung und einer glatten Testfunktion v.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ Viskositätslösungen der Hamilton-Jacobi Gleichungen

$$u_t^k + H(Du^k, x) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$(k = 1, \dots)$ und die Folge der u^k konvergiere gleichmäßig gegen ein u. Sei weiterhin H stetig. Zeigen sie, dass u eine Viskositätslösung von

$$u_t + H(Du, x) = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

ist, also dass der gleichmäßige Limes von Viskositätslösungen wieder eine Viskositätslösung ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Seien u^i $(i = 1, 2)$ Viskositätslösungen von

$$\begin{cases} u^i_t + H(Du^i, x) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u^i = g^i & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei H die Abschätzungen

$$\begin{cases} |H(p, x) - H(q, x)| \leq C\,|p - q| \\ |H(p, x) - H(p, y)| \leq C\,|x - y|\,(1 + |p|) \end{cases}$$

für $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $C \geq 0$ erfülle. Zeigen Sie, dass die Kontraktionseigenschaft

$$\sup_{\mathbb{R}^n} \left|u^1(., t) - u^2(., t)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} \left|g^1 - g^2\right|$$

für $t \geq 0$ gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $u := \operatorname{dist}(x, \partial U)$. Zeigen Sie, dass u Lipschitz-stetig und eine Viskositätslösung der Eikonal-Gleichung

$$|Du| = 1 \qquad \text{in } U$$

ist. Letzteres bedeutet, dass jede Funktion $v \in C^\infty(U)$, für die $u - v$ ein Maximum (Minimum) im Punkt $x_0 \in U$ hat, die Ungleichung $|Dv(x_0)| \leq 1$ (≥ 1) erfüllt.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html