Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc.

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

9. Übung

Abgabe: Montag, 08.12.2014, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Eine Jacht startet in einem Punkt $(x_1, 0)$ auf der positiven x_1-Achse und segelt mit Geschwindigkeit $b_1 > 0$ nach rechts. Eine weitere Jacht starten im Punkt $(0, x_2)$ auf der positiven x_2-Achse und verfolgt die erste Jacht, segelt also mit Geschwindigkeit $b_2 > b_1$ immer auf sie zu. Finden Sie die partielle Differentialgleichung, die von der Funktion

$$u(x_1, x_2) := \text{Zeit, die die zweite Jacht benötigt um die erste einzuholen}$$

gelöst wird.

(5 Punkte)

Aufgabe 2 (optimale Steuerung ohne endlichen Horizont):
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ beschränkt und Lipschitz-stetig. Weiter erfülle $r : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ die Abschätzungen

$$|r(x, a)| \leq C, \quad |r(x, a) - r(y, a)| \leq C\,|x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, a \in A$, mit einer Konstante C.
Zu $z \in \mathbb{R}^n$ und einer Steuerung aus $\mathcal{A} := \{\alpha : [0, \infty) \to A \mid \alpha(.) \text{ ist messbar}\}$ bezeichne $x = x(.)$ die lokal Lipschitz-stetige eindeutige Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = f(x(s), \alpha(s)) & (s > 0) \\ x(0) = z \end{cases}$$

Wir betrachten zu gegebenem $\lambda > 0$ die modifizierte Kostenfunktion

$$C_z\,[\alpha(.)] := \int_0^\infty e^{-\lambda s} r(x(s), \alpha(s))\mathrm{d}s.$$

Weiter sei

$$u(z) := \inf_{\alpha(.) \in \mathcal{A}} C_z\,[\alpha(.)]\,.$$

Zeigen Sie, dass u beschränkt ist, und falls $\lambda > \operatorname{Lip}[f]$ gilt, zudem Lipschitz-stetig.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Im Kontext von Aufgabe 2 gilt folgende Variante des Prinzips der dynamischen Programmierung:

$$u(z) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} \left\{ \int_0^h e^{-\lambda s} r(x(s),\alpha(s))\, ds + e^{-\lambda h} u(x(h)) \right\}$$

Zeigen Sie dies.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Zu einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und einem Anfangszeitpunkt $0 < t \leq T$ betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} \dot{x}^*(s) = f(x^*(s),\alpha^*(s)) \qquad (t < s < T) \\ x^*(t) = x, \end{cases}$$

wobei zu jedem Zeitpunkt s, $\alpha^*(s) \in A$ so gewählt wird, dass

$$f(x^*(s),\alpha^*(s)) \cdot Du(x^*(s),s) + r(x^*(s),\alpha^*(s)) = \min_{a\in A} \{ f(x^*(s),a) \cdot Du(x^*(s),s) + r(x^*(s),a) \}$$

gilt. Dabei ist

$$u(x,t) := \inf_{\alpha(.)\in\mathcal{A}} C_{x,t}[\alpha(.)] = \inf_{\alpha(.)\in\mathcal{A}} \left\{ \int\limits_t^T r(x(s),\alpha(s))\mathrm{d}s + g(x(T)) \right\}.$$

Zeigen Sie

$$u(x,t) = C_{x,t}[\alpha^*(.)],$$

sofern u und $\alpha^*(.)$ hinreichend glatt sind.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html