Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc.

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

11. Übung

Abgabe: Montag, 19.01.2015, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Finden Sie mindestens zwei verschiedene Viskositätslösungen der Gleichung $-\Delta_\infty u = 0$ durch den Ansatz $u(x,y) = x^\alpha + cy^\beta$ mit geeigneten Parametern α, β, c. Welche der gefundenen Lösungen sind auch klassische Lösungen, welche nicht?

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Es sei $p \in (1,\infty)$. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

(a)

$$\left(|b|^{p-2}\, b - |a|^{p-2}\, a, b-a\right) > 0 \qquad \text{für } b, a \in \mathbb{R}^n, b \neq a.$$

Hinweis: Für konvexe Funktionen $f \in C^1$ gilt $f(x) \geq f(y) + (\nabla f(y), x-y)$. Was gilt für strikt konvexe Funktionen?

(b)

$$\left(|b|^{p-2}\, b - |a|^{p-2}\, a, b-a\right) \leq (p-1)\,|b-a|^2 \int\limits_0^1 |a+t(b-a)|^{p-2}\,\mathrm{d}t,$$

falls $p \geq 2$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Identität

$$|b|^{p-2}\, b - |a|^{p-2}\, a = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{|a+t(b-a)|^{p-2}\,(a+t(b-a))\right\}\mathrm{d}t.$$

(c)

$$\left(|b|^{\frac{p-2}{2}}\, b - |a|^{\frac{p-2}{2}}\, a, b-a\right)^2 \leq \frac{p^2}{4}\,|b-a|^2\left(|b|^{p-2}\, b - |a|^{p-2}\, a, b-a\right),$$

falls $p \geq 2$ ist.

(2+2+2=6 Punkte)

Aufgabe 3:
Seien $\lambda, a, b_1, \ldots, b_n > 0$. Die Funktion $v \in C^2(-a, a)$ erfülle

$$\left(|v'|^{p-2}\, v'\right)' = \lambda\, |v|^{p-2}\, v$$

im Intervall $(-a, a)$ und $v(-a) = v(a) = 0$.
Bestimmen Sie mittels Produktansatz eine Lösung von

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|u_{x_i}|^{p-2}\, u_{x_i}\right) = \mu\, |u|^{p-2}\, u$$

in dem Quader $Q = \prod_{i=1}^{n} (-b_i, b_i)$ mit $u = 0$ auf ∂Q und einem geeigneten $\mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie dabei μ explizit an.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Seien $\Omega_0, \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ konvexe Gebiete mit glattem Rand, $\Omega_1 \subset\subset \Omega_0$ und $\Omega := \Omega_0 \setminus \Omega_1$. Die Funktion $u \in C^2(\Omega_0)$ erfülle

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \quad\; u = 1 & \text{auf } \partial\Omega_1 \\ \quad\; u = 0 & \text{auf } \partial\Omega_0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $|\nabla u|^2$ nimmt sein Maximum über Ω auf $\partial\Omega$ an.

(b) $|\nabla u|^2$ nimmt sein Maximum über Ω auf $\partial\Omega_1$ an.

(2+3=5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html