Prof. Dr. B. Kawohl
PD Dr. S. Krömer
M. Kühn, M.Sc.

WS 2014/2015

Nichtlineare partielle Differentialgleichungen

12. Übung

Abgabe: Montag, 26.01.2015, bis 10:00 Uhr
(im Hörsaal am Anfang der Vorlesung oder in den Kasten für Übungsblätter im MI)

Aufgabe 1:
Sei u Minimierer des Funktionals

$$J_1(v) = \int\limits_\Omega |\nabla v(x)| \,\mathrm{d}x$$

auf $\left\{v \in W^{1,1}(\Omega), v - g \in W_0^{1,1}(\Omega)\right\}$ und $g \in W^{1,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Dann gilt

$$u(x) \geq \min_{y \in \partial\Omega} g(y) =: m \quad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Hinweis: Wenn die Menge $D = \{x \mid u(x) < m\}$ positives Maß hat, so ersetze man u durch $\hat{u} := (u-m)^+ + m \in W^{1,1}(\Omega)$ und benutze $J_1(u) \leq J_1(\hat{u})$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $F_p^N(q,X) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R},\ (q,X) \mapsto -\frac{1}{p} \sum\limits_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} + (p-2)\frac{q_i q_j}{|q|^2}\right) X_{ij}$. Bestimmen Sie

$$F_{p\ *}^N(0,X) = \liminf_{q \to 0} F_p^N(q,X)$$

und

$$F_p^{N*}(0,X) = \limsup_{q \to 0} F_p^N(q,X).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass der normalisierte p-Laplace für $p > 1$ im folgenden Sinne gleichmäßig stark elliptisch ist: Es existiert eine Konstante $\alpha = \alpha(p) > 0$, so dass

$$F_p^N(q, \xi\xi^T) \leq -\alpha|\xi|^2 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ wobei } \xi\xi^T = (\xi_i\xi_j)_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Wieso folgt daraus entartete Elliptizität im Sinne der Vorlesung?

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glatten Rand, $\alpha > 0$ und $v \mapsto A(v)$ ein Differentialoperator auf Ω, der homogen vom Grad α ist, d.h. für alle hinreichend glatten Funktionen $v : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gelte $A(\gamma v) = \gamma^\alpha A(v)$. Wir betrachten für $u : [0, \infty) \times \Omega$ die Differentialgleichung

$$u_t = A(u) \quad \text{auf } (0, \infty) \times \Omega,$$

wobei $A(u)(x,t) := A(v^{(t)})(x)$ mit $v^{(t)}(x) := u(t,x)$ (die Zeitvariable t wird bei der Anwendung des Operators A, der nur auf Funktionen von x wirkt, festgehalten). Wir schränken uns im Folgenden ausschließlich auf glatte Lösungen in Produktform $u(x,t) = h(t)w(x)$ ein, mit $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $w : \Omega \to \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie für jedes $\alpha > 0$ ein Beispiel eines α-homogenen Differentialoperators an. Impliziert $\alpha = 1$, dass A linear ist?

(b) Zeigen Sie im Fall $A(u) = \Delta u$, dass $u(x,t) = e^{\lambda t} w(x)$ eine Lösung liefert, wenn $\Delta w = \lambda w$ in Ω gilt.

(c) Bestimmen Sie nun explizit die Zeitabhängigkeit der Lösungen $u(x,t) = h(t)w(x)$ für allgemeines A. Welche Bedingung erhält man nun für w, und für welche Werte von α kann exponentieller Abfall in t wie in (a) vorkommen (wo die Eigenwerte λ des Laplace typischerweise negativ sind, zumindest bei geeigneten Randbedingungen)?

(2+1+3=6 Punkte)

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe für Bonuspunkte):
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{\phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla \phi|^p \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega |\phi|^p \, \mathrm{d}x} > 0.$$

Weiter seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$ eine Ausschöpfung von Ω, es gelte also $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$.
Zeigen Sie

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_1(\Omega_i) = \lambda_1(\Omega).$$

(5 Bonuspunkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1415WS/NlPDE.html