

Funktionalanalysis

2. Übung

Abgabe: Montag, 20.04.2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html>

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass $C([a, b]) := \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ stetig}\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

kein Hilbertraum ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 2:

Es bezeichne $B_n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$ die n -dimensionale Einheitskugel in der euklidischen Norm. Zeigen Sie, dass für deren Volumen

$$\text{Vol}(B_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

gilt und vergleichen dieses mit dem des Einheitswürfels $Q_n := [0, 1]^n$ für $n \rightarrow \infty$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis von Lemma 1.1

(a) Beweisen Sie Lemma 1.1 für stetige Funktionen, d. h. zeigen Sie:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Gilt für eine stetige Funktion $u \in C(\Omega)$ und alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) \, dx = 0,$$

so folgt $u = 0$.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $L^2(\Omega)$ kann man definieren als die Vervollständigung des Raumes $C(\overline{\Omega})$ bezüglich des Skalarproduktes

$$(u, v)_{L^2} := \int_{\Omega} u(x) v(x) \, dx.$$

(Damit ergibt sich, dass man alle $L^2(\Omega)$ -Funktionen bezüglich der L^2 -Norm $\|u\|_2 := \sqrt{(u, u)_{L^2}}$ durch stetige Funktionen approximieren kann.) Beweisen Sie eine leicht abgeschwächte Form von Lemma 1.1, indem Sie folgende Äquivalenzen zeigen:

Für $u \in L^2(\Omega)$ sind äquivalent:

(i) Für alle $\varphi \in C_c(\Omega) = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}) ; \varphi \text{ hat kompakten Träger in } \Omega\}$ gilt $\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0$.

(ii) Für alle messbaren Mengen $E \subseteq \Omega$ mit $\bar{E} \subseteq \Omega$ gilt

$$\int_E u dx = 0$$

(iii) Für alle messbaren Mengen $E \subseteq \Omega$ gilt

$$\int_E u dx = 0$$

(iv)

$$u(x) = 0 \quad \text{f. ü.}$$

Hinweis: Hier genügt es zu wissen, dass eine Menge E messbar ist, wenn es eine Folge von Borelmengen (d. h. Mengen die sich als abzählbare Vereinigung, Schnitt und Komplementbildung von offenen Mengen ergeben) gibt, die f. ü. gegen E konvergiert. Für eine $L^2(\Omega)$ -Funktion u sind die Mengen auf denen u größer, kleiner oder gleich null ist, messbar.

Für den Beweis der Äquivalenzen könnten der Satz von der majorisierten Konvergenz und die Tatsache, dass jede L^2 -konvergente Folge eine f. ü. konvergente Teilfolge enthält, hilfreich sein.

(2+7=9 Punkte)

Aufgabe 4:

Welche der folgenden auf dem Intervall $(0, 1)$ definierten Funktionen liegt in $W^{1,2}(0, 1) := W^{1,2}((0, 1))$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{wenn } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{wenn } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{wenn } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html>