

Funktionalanalysis

3. Übung

Abgabe: Montag, 27.04.2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html>

Aufgabe 1:

Gegeben seien $\beta > 0$ und $\alpha > 0$.

- (a) Bekanntlich definiert

$$\|y\|_\infty := \max\{|y(t)| ; t \in [0, \beta]\} \quad (y \in C[0, \beta])$$

auf dem Raum $C[0, \beta] := C([0, \beta])$ eine Norm.

Zeigen Sie, dass durch

$$\|y\|_\alpha := \max\{|y(t)|e^{-\alpha t} ; t \in [0, \beta]\}$$

ebenfalls eine Norm definiert ist und dass diese zur Norm $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent ist.

- (b) Gegeben sei zusätzlich $\eta \in \mathbb{R}$ und eine Lipschitz-stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Durch

$$(Ty)(t) := \eta + \int_0^t f(y(s)) ds$$

sei eine Abbildung $T : C[0, \beta] \rightarrow C[0, \beta]$ definiert. Begründen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Unter welchen Voraussetzungen an α , β und L ist T bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ oder der Norm $\|\cdot\|_\alpha$ eine Kontraktion?

Welche interessante Eigenschaft besitzen die Fixpunkte der Abbildung T ?

(2 + 3 = 5 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei X ein reeller oder komplexer Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$.

- (a) Zeigen Sie: Ist X sogar ein Hilbertraum und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm, so gilt für alle $u, v \in X$ die Gleichung

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (1)$$

- (b) Sei X ein reeller Banachraum, dessen Norm für alle $u, v \in X$ die Gleichung (1) erfülle. Zeigen Sie, dass es dann ein Skalarprodukt in X gibt, so dass die Norm $\|\cdot\|$ von diesem erzeugt wird.

- (c) Im Unterschied zu (b) setzen wir nun voraus, dass X ein komplexer Banachraum sei. Gibt es auch hier ein Skalarprodukt, welches die Norm erzeugt?

Hinweise: Zu (b): Drücken Sie das Skalarprodukt mit Hilfe der Norm aus. Um die (Bi-)Linearität der von Ihnen gefundenen Abbildung nachzuweisen, zeigen Sie zunächst die Additivität. Folgern Sie dann auf die Homogenität für skalare Vielfache aus \mathbb{N} , für solche aus \mathbb{Z} , für solche aus \mathbb{Q} und schließlich für solche aus \mathbb{R} . Für den Teil (c) genügt eine Skizze des Beweises.

(1 + 4 + 2 = 7 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ die induzierte Norm. Weiter sei $K \subset H$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Zeigen Sie:

- (a) Ein $y \in K$ ist genau dann die Projektion von x auf K , wenn

$$\langle y, \eta - y \rangle \geq \langle x, \eta - y \rangle \quad \forall \eta \in K$$

gilt.

- (b) Die Projektionsabbildung $\text{Pr}_K : H \rightarrow K$ ist nicht-expansiv, das heißt es gilt

$$\| \text{Pr}_K x_1 - \text{Pr}_K x_2 \| \leq \| x_1 - x_2 \| \quad \forall x_1, x_2 \in H.$$

(3 + 1 = 4 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{falls } |x| < 1, \\ 0 & \text{falls } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die k -ten Ableitungen der Funktion $\gamma(r) := e^{-\frac{1}{1-r^2}}$ die Gestalt

$$\gamma^{(k)}(r) = \frac{P_k(r)}{(r^2 - 1)^{2k}} \gamma(r)$$

mit einem Polynom P_k haben.

(4 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html>