Prof. Dr. B. Kawohl
M. Kühn, M.Sc.
Dr. S. Littig

SS 2015

Funktionalanalysis

4. Übung

Abgabe: Montag, 04.05.2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Sei $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und $F : H \to \mathbb{C}$ ein lineares stetiges Funktional. Zeigen Sie, dass die Norm

$$\|F\|_{H^*} := \inf\big\{K \;;\; \forall u \in H : \quad |F(u)| \leq K\|u\|_H\big\}$$

von F in äquivalenter Weise auch über die Ausdrücke

$$\sup\left\{\frac{|F(u)|}{\|u\|} \;;\; u \in H \setminus \{0\}\right\}$$

oder

$$\sup\left\{\frac{\operatorname{Re}\big(F(u)\big)}{\|u\|} \;;\; u \in H \setminus \{0\}\right\}$$

definiert werden kann.

(2 Punkte)

Aufgabe 2:
Gegeben sei der Operator ∂ der jeder Funktion $u \in C^1[0,1]$ seine Ableitung zuordnet. Zeigen Sie:

(a) $\partial : C^1[0,1] \to C[0,1]$ ist stetig. Dabei sei $C^1[0,1]$ wie üblich mit der Norm

$$\|u\|_{C^1} := \|u'\|_\infty + \|u\|_\infty \qquad (u \in C^1[0,1])$$

ausgestattet. Berechnen Sie die Operatornorm.

(b) Zeigen Sie $\partial : C^1[0,1] \to C[0,1]$ ist nicht stetig, wenn wir diesmal $C^1[0,1]$ als mit der Supremumsnorm

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |u(x)| \qquad u \in C^1[0,1]$$

ausgestattet auffassen.

(3 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq B_1(0)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

(Zur Existenz einer solchen Funktion vergleichen Sie Aufgabe 4 vom 3. Übungsblatt).

Sei $p \in [1, \infty]$. Wir definieren einen linearen Operator $T_\varphi : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ durch

$$T_\varphi u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)u(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass dieser Operator wohldefiniert ist, das heißt $T_\varphi u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie weiter, dass T_φ auch beschränkt ist.

(b) Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und u habe kompakten Träger. Zeigen Sie, dass dann

$$\operatorname{supp}(T_\varphi u) \subseteq \operatorname{supp} u + B_1(0)$$

Dabei ist der Träger $\operatorname{supp} u$ einer Lebesgue-Funktion u definiert durch

$$\operatorname{supp} u := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{A\ ;\ A \text{ offen und } u(x) = 0 \text{ für f. a. } x \in A\}\,.$$

(c) Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $T_\varphi u$ beliebig oft differenzierbar ist. Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass für die partiellen Ableitungen von $T_\varphi u$

$$D_i T_\varphi u(x) = T_{D_i\varphi} u(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

gilt.

(d) Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ und fordern zusätzlich $p \neq \infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\left\|T_{\varphi_\varepsilon} u - u\right\|_p \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0)\,.$$

Hinweis zu a): Nutzen Sie die Hölder-Ungleichung mit $\varphi = \varphi^{1-1/p}\varphi^{1/p}$.

zu (d): Zeigen Sie die Aussage zunächst für stetige Funktionen mit kompaktem Träger.

(2 + 1 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Aufgabe 4:

Betrachten Sie das Dirichletproblem

$$\begin{cases} -\Delta u + \alpha u = \beta f & \text{in } \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

in einem offenen und beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega),\ \alpha \geq 0$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $f \in L^2(\Omega)$ hat das Problem (1) eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Durch (a) wird eine lineare und stetige Abbildung $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ induziert, die einer rechten Seite f die zugehörige schwache Lösung u zuordnet.

(c) Der zu S adjungierte Operator $S^* : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist gegeben durch $S^*z := \beta p$, wobei $p \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige schwache Lösung zu dem Problem

$$\begin{cases} -\Delta p + \alpha p = z & \text{in } \Omega \\ \qquad\quad p = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

ist.

(3 + 2 + 2 = 7 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html