

Funktionalanalysis

5. Übung

Abgabe: Montag, 11.05.2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:

Beweisen Sie Satz 5.2 der Vorlesung, das heißt: Sind H_1 und H_2 reelle oder komplexe Hilberträume und ist $A : H_1 \rightarrow H_2$ ein linearer und beschränkter Operator, so gilt

- (i) Die Operatornormen von A und A^* erfüllen stets $\|A\| = \|A^*\|$.
- (ii) Es gilt $A^{**} := (A^*)^* = A$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Finden Sie für die gegebenen Abbildungen jeweils deren adjungierte Abbildung und die Norm jeweils beider Abbildungen:

(a) $A : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow L^2(0, \infty)$

$$(\xi_i)_{i=1}^\infty \mapsto f(x) = \xi, \text{ falls } x \in (i-1, i), i \in \mathbb{N}.$$

(b) $B : L^2(0, \infty) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$

$$f \mapsto \left(\int_{i-1}^i h(x) f(x) dx \right)_{i=1}^\infty, \text{ wobei } h \text{ eine messbare, beschränkte Funktion auf } (0, \infty) \text{ ist.}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- (a) Seien $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in H$ mit $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left\| \sum_{n=1}^N x_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \|x_n\|^2.$$

- (b) Sei $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ ein Orthonormalsystem in H . Zeigen Sie, dass für $y \in H$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2 \leq \|y\|^2.$$

(1+3 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ ein Orthonormalsystem in H und $V := \overline{\text{span } S}$.

- (a) Nach dem Projektionssatz gibt es zu jedem $y \in H$ eine eindeutige Zerlegung

$$y = v + w, \quad v \in V, \quad w \in V^\perp.$$

Zeigen Sie, dass die Fourierreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n$ von y bezüglich S gegen v konvergiert.

Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Folge der Partialsummen (s_n) mit $s_i = \sum_{n=1}^i \langle y, x_n \rangle x_n$ eine Cauchyfolge bilden und dann, dass der Grenzwert v ist.

- (b) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$

(ii) $\forall x \in H : \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2$

(iii) $V = H$

(iv) $\langle x, x_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies x = 0$

Ein Orthonormalsystem mit diesen Eigenschaften nennt man eine Orthonormalbasis.

(4+4 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html>