

Funktionalanalysis

6. Übung

Abgabe: Montag, 18.05.2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:

Sei H ein Hilbertraum und seien M, N Teilmengen von H . Zeigen Sie:

- (a) M^\perp ist ein abgeschlossener Unterraum von H .
- (b) $N \subset M \implies M^\perp \subset N^\perp$
- (c) Gilt auch die Umkehrung $M^\perp \subset N^\perp \implies N \subset M$?

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei V ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes H und sei P von H auf V die orthogonale Projektion.

- (a) Beweisen Sie: P ist eine beschränkte lineare Abbildung. Bestimmen sie die Operatornorm von P .
- (b) Zeigen Sie: $R(P) := \{Px \mid x \in H\} = V$, $N(P) := \{x \in H \mid Px = 0\} = V^\perp$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Für $f, g \in C[-1, 1]$ definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Die Vervollständigung des Raumes der reellen stetigen Funktionen bezüglich der Norm $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ wird mit $L^2((0, 1), \frac{1}{1-x^2})$ bezeichnet. Nach dem Satz von Weierstraß ist $\mathcal{P}[-1, 1]$, der Raum der reellen Polynome auf $[-1, 1]$, ein dichter Teilraum von $C[-1, 1]$ und, wie man sich leicht überlegt, damit auch von $L^2((0, 1), \frac{1}{1-x^2})$. Ziel dieser Aufgabe ist die Konstruktion eines Orthogonalsystems $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$ von $L^2((-1, 1), \frac{1}{1-x^2})$ aus Polynomfunktionen. Anders als bei einem Orthonormalsystem sonst üblich, sollen diese so normiert werden, dass $\phi_n(1) = 1$ gilt.

- (a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der Tat ein Skalarprodukt definiert.
- (b) Beginnen Sie mit $\phi_0(x) = 1$ und finden Sie ein normiertes Polynom ϕ_1 ersten Grades, welches bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf ϕ_0 senkrecht steht.

- (c) Finden Sie ein Polynom ϕ_2 zweiten Grades, welches auf ϕ_0 und ϕ_1 senkrecht steht und ein Polynom ϕ_3 dritten Grades, welches auf ϕ_0 , ϕ_1 und ϕ_2 senkrecht steht.
- (d) Zeigen Sie, dass das $(n + 1)$ -te Polynom ϕ_{n+1} , welches auf ϕ_0, \dots, ϕ_n senkrecht steht, durch die Rekursionsformel

$$\phi_{n+1}(x) = 2x\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)$$

gegeben ist.

Hinweis zu (d): Untersuchen Sie zunächst, ob es sich bei den ϕ_n um gerade bzw. ungerade Funktionen handelt.

(1+1+2+3=7 Punkte)

Aufgabe 4:

- (a) Gegeben seien $1 \leq p < q \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 < |\Omega| < \infty$ (hierbei bezeichnet $|\Omega|$ das Lebesguemaß von Ω). Zeigen Sie

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

und berechnen Sie die Operatornorm der Identität $I : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, $u \mapsto u$.

- (b) Bleibt die Inklusion $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ richtig, wenn unter (a) auf die Forderung an das endliche Lebesguemaß von Ω verzichtet und der Fall $q = \infty$ ausgeschlossen wird? Finden Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie die Aussage unter den modifizierten Voraussetzungen.

(3+2=5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html>