

## Funktionalanalysis

### 8. Übung

**Abgabe: Montag, 08.06.2015, bis 10:00 Uhr**  
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

#### Aufgabe 1:

Zeigen Sie: Für zwei Orthogonalprojektionen  $E_1$  und  $E_2$  auf abgeschlossene lineare Unterräume eines komplexen Hilbertraums sind äquivalent:

- (i)  $R(E_1) \subseteq R(E_2)$ ,
- (ii)  $N(E_2) \subseteq N(E_1)$ ,
- (iii)  $E_1 E_2 = E_2 E_1 = E_1$ ,
- (iv)  $E_2 - E_1 \geq 0$ .

Dabei heißt ein selbstadjungierten Operator  $P : H \rightarrow H$  positiv,  $P \geq 0$ , wenn

$$\langle Px, x \rangle \geq 0$$

für alle  $x \in H$ .

**(5 Punkte)**

#### Aufgabe 2:

Sei  $H$  ein komplexer Hilbertraum,  $K : H \rightarrow H$  kompakt, linear und selbstadjungiert. Zeigen Sie: Ist  $u \in H$  mit  $\|u\| = 1$  eine Maximal- oder Minimalstelle von  $y \mapsto \langle Ky, y \rangle$ ,  $\|y\| = 1$ , so gilt  $\langle Ku, v \rangle = 0$  für alle  $v \in H$  mit  $\|v\| = 1$  und  $v \perp u$ .

*Hinweis:* Für  $\operatorname{Re}\langle Ku, v \rangle$  wurde die Aussage bereits in der Vorlesung in Satz 9.1 bewiesen.

**(3 Punkte)**

### Aufgabe 3:

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{in } (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

auf einem Intervall  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  mit  $f \in C(0, 1)$ . Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist bekannt, dass es eine Greensche Funktion  $G \in C([0, 1] \times [0, 1])$  gibt, so dass sich die eindeutige Lösung des Randwertproblems durch Anwendung des Operators  $T_0 : C(0, 1) \rightarrow C^2(0, 1)$ ,  $(T_0 g)(x) := \int_0^1 G(x, y)g(y) dy$  auf die rechte Seite  $f$  angeben lässt. Mit derselben Vorschrift kann man einen linearen Operator  $T : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  durch  $(Tg)(x) := \int_0^1 G(x, y)g(y) dy$  definieren. Zeigen Sie, dass sich der Spektralsatz (Satz 9.2) auf  $T$  anwenden lässt und bestimmen Sie das Orthonormalsystem von Eigenfunktionen von  $T$  und die zugehörigen Eigenwerte. Sie dürfen dabei verwenden, dass die Funktion  $G$  symmetrisch ist, das heißt  $G(x, y) = G(y, x)$ .

**(5 Punkte)**

### Aufgabe 4:

Seien  $H$  ein Hilbertraum und  $0 \neq x^0 \in H$ . Ein kompakter selbstadjungierter Operator  $A : H \rightarrow H$  habe den betragsgrößten Eigenwert  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  (d. h. für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$  gilt  $|\lambda| \leq |\lambda_1|$ ). Und es bezeichnen  $V_{\lambda_1}$  und  $V_{-\lambda_1}$  die zu  $\lambda_1$  bzw.  $-\lambda_1$  gehörigen Eigenräume.

Zur Bestimmung von  $|\lambda_1|$  kann folgender Algorithmus eingesetzt werden:

$$\begin{cases} w^0 := x^0 / \|x^0\| & \text{für } k = 0 \\ x^k := Aw^{k-1}, \quad \alpha_k := \|x^k\|, \quad w^k := x^k / \alpha_k & \text{für } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = |\lambda_1|$$

für alle  $x_0 \notin (V_{\lambda_1} \oplus V_{-\lambda_1})^\perp$ .

Eignet sich das Verfahren auch zur Bestimmung eines Eigenvektors? Was passiert, wenn man mit  $x^0 \in V_{\lambda_1}^\perp$  startet?

**(7 Punkte)**

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

<http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html>