Prof. Dr. B. Kawohl
M. Kühn, M.Sc.
Dr. S. Littig

SS 2015

Funktionalanalysis

9. Übung

Abgabe: Montag, 15. 06. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Metrik $d : V \times V \to \mathbb{R}$ die sogenannte Vierecksungleichung gilt:

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \qquad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V.$$

(b) Sei $d : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Metrik und $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften:

(i) $\varphi(0) = 0,\ \varphi(x) > 0$ für $x > 0$,

(ii) φ monoton wachsend,

(iii) φ' monoton fallend.

Zeigen Sie, dass dann $\tilde{d}(x, y) := \varphi(d(x, y))$ ebenfalls eine Metrik ist.
Bemerkung: $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ ist ein Beispiel für solch eine Funktion.

(1 + 2 = 3 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei d eine translationsinvariante Metrik auf V, d.h.

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in V$$

(a) Zeigen Sie

$$d(nx, 0) \leq n\, d(x, 0)$$

für alle $x \in V$ und $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei (x_n) eine Folge in V mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Zeigen Sie, dass es dann eine Folge positiver Zahlen (γ_n) gibt, so dass gilt: $\gamma_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ und $\gamma_n x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(c) Ist d zusätzlich skalierungsinvariant, d.h.

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \qquad \forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{C},$$

so definiert $\|x\| := d(x, 0)$ eine Norm auf V.

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Weisen Sie nach, dass der Folgenraum l^p vollständig ist $(1 \leq p \leq \infty)$.

(b) Zeigen Sie, dass der Folgenraum $l^1 := \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots) | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$ mit der Metrik $d_\infty(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$ nicht vollständig ist.

(3 + 2 = 5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei V ein Vektorraum und $p : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Halbnorm auf V, das heißt p ist positiv homogen, erfüllt die Dreiecksungleichung und ist positiv semidefinit (d. h. $p(x) \geq 0$ für alle $x \in V$). Im Unterschied zu einer Norm folgt jedoch aus $p(x) = 0$ nicht notwendig dass $x = 0$.

Wir setzen $N := \{x \in V \; ; \; p(x) = 0\}$ und definieren auf V eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$x \sim y \; := \; x - y \in N \, .$$

Mit $V/N := \{[x] \; ; \; x \in X\}$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

(a) Zeigen Sie: Die Menge der Äquivalenzklassen V/N trägt in kanonischer Weise eine Vektorraumstruktur. Wie sieht die Null in V/N aus? *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass N ein Unterraum ist und danach die Identität

$$[x] = x + N \, .$$

(b) Zeigen Sie: Auf V/N ist die durch $\tilde{p} : V/N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$\tilde{p}([x]) := p(x)$$

gegebenen Abbildung wohldefiniert und macht V/N zu einem normierten Raum.

(c) Zeigen Sie: Ist X ein normierter Raum mit Norm $\| \cdot \|$ und U ein Unterraum, so ist auf X/U durch

$$q([x]) := \inf_{y \in [x]} \|y\|$$

eine Halbnorm definiert. Zeigen Sie außerdem: Ist U abgeschlossen, dann ist q sogar eine Norm.

Bemerkung: Man kann außerdem zeigen, dass wenn X vollständig und U abgeschlossen ist, dass dann auch X/U bezüglich der Norm q vollständig (also ein Banachraum) ist.

(1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html