Prof. Dr. B. Kawohl
M. Kühn, M.Sc.
Dr. S. Littig

SS 2015

Funktionalanalysis

10. Übung

Abgabe: Montag, 22. 06. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Es sei V ein reeller (oder komplexer) Vektorraum. Eine Abbildung $p : V \to \mathbb{R}$ heißt *Seminorm* auf V, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) gilt, dass

$$p(x) \geq 0, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$$

Eine Familie von Seminormen p_n, $n \in \mathbb{N}$ heißt trennend, falls für jedes $x \in V$

$$p_n(x) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \implies x = 0.$$

Zeigen Sie, dass für jede trennende Familie von Seminormen p_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}$$

eine translationsinvariante Metrik auf V ist.
Zusatz (ohne Bewertung): Überlegen Sie sich, wie man die p_n definieren kann, um mit Hilfe der obigen Konstruktion $V := C(\Omega)$ (mit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen) zu einem vollständigen metrischen Vektorraum zu machen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiges Gebiet. Beweisen Sie, dass für $\alpha \in (0,1)$ der Raum $C^\alpha(\overline{\Omega})$ der hölderstetigen Funktionen vollständig ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $C(\overline{\Omega})$ vollständig ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 3: Sei c_0 der Raum der gegen Null konvergenten Folgen $(x_n)_n$ in $\mathbb{R}$, versehen mit der Norm

$$\|(x_n)\|_0 := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \,.$$

Sie dürfen verwenden, dass dieser Raum vollständig, also ein Banachraum ist.
Zeigen Sie:

a) $(l^1)^* = l^\infty$

b) $(c_0)^* = l^1$

Die Gleichheit $X = Y$ ist dabei im Sinne von isometrischer Isomorphie zu verstehen, das heißt, dass es eine bijektive lineare Abbildung $I : Y \to X$ gibt, so dass $\|Iy\|_X = \|y\|_Y$ für jedes $y \in Y$ gilt.
Hinweis zu a): Betrachten Sie für $v = (v_n) \in l^\infty$ das Funktional $l^1 \ni (x_n) \mapsto \sum_n x_n v_n$ und weisen Sie dessen Stetigkeit nach. Umgekehrt können Sie zu jedem $f \in (l_1)^*$ die Folge $(v_n)_n = \big(f(e^n)\big)_n$ betrachten, wobei e^n den n-ten Einheitsvektor in l^1 bezeichnet.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Sei (x_n) eine Folge im Banachraum B und (f_n) eine Folge in B^*, sowie $x \in B$, $f \in B^*$. Zeigen Sie anhand von Gegenbeispielen, dass folgende Aussagen im Allgemeinen *nicht* gelten:

a) $(x_n \rightharpoonup x$ und $f_n \rightharpoonup f) \Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$,

b) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f$.

Hinweis zu b): Betrachten sie B, so dass $B^{**} \neq B$ gilt, wie z. B. in Aufgabe 3.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html