Prof. Dr. B. Kawohl
M. Kühn, M.Sc.
Dr. S. Littig

SS 2015

Funktionalanalysis

11. Übung

Abgabe: Montag, 29. 06. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:

Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Gegeben sei eine Menge von Funktionen $\mathcal{F} \subset C^0(X;Y) = \{f : X \to Y,\ f \text{ stetig}\}$ mit

$$\forall x \in X \quad \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty\,.$$

Zeigen Sie, dass es dann ein $x_0 \in X$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass

$$\sup_{x\in\overline{B_{\varepsilon_0}(x_0)}} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f(x)\|_Y < \infty.$$

Hinweis: Obwohl die Funktionen in $\mathcal{F}$ im Allgemeinen nicht linear sind, lässt sich auch in dieser Situation der Kerngedanke des Beweises zum Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit anwenden.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien X, Y Banachräume und $b : X \times Y \to \mathbb{C}$ sesquilinear. Es gelte

$$x \mapsto b(x,y) \text{ ist stetig für jedes } y \in Y$$
$$y \mapsto b(x,y) \text{ ist stetig für jedes } x \in X.$$

Dann gibt es eine Konstante $0 \leq C < \infty$, so dass

$$|b(x,y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y \qquad \text{für alle } x \in X,\ y \in Y.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei X ein normierter Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ nennt man ein G_δ, wenn sie sich als abzählbarer Schnitt von offenen Teilmengen von X schreiben lässt.
Zeigen Sie: Ist $M \subseteq X$ ein dichtes G_δ, dann ist M überabzählbar.
Was folgt daraus für $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$?
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und wenden Sie Lemma 3.1 an.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Menge $S := \{t \in \mathbb{R} \,;\, f \text{ stetig in } t\}$, d. h. die Menge der Stetigkeitspunkte von f, ist eine G_δ-Menge. *Hinweis:* Betrachten Sie die Mengen

$$S_n := \{t \in \mathbb{R} \,;\, \exists r > 0 : \sup\{f(s) \,;\, |s-t| < r\} - \inf\{f(s) \,;\, |s-t| < r\} < \tfrac{1}{n}\}\,,$$

und zeigen Sie $S = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

b) Zeigen Sie: Es gibt keine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in allen rationalen Punkten stetig, aber nicht stetig in allen irrationalen Punkten ist.

c) Zeigen Sie: Die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } t \text{ irrational} \\ \frac{1}{q} & \text{wenn } t = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

ist stetig in allen irrationalen Punkten, aber nicht stetig in allen rationalen Punkten.

(3+1+2=6 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html