Prof. Dr. B. Kawohl
M. Kühn, M.Sc.
Dr. S. Littig

SS 2015

Funktionalanalysis

12. Übung

Abgabe: Montag, 06. 07. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Es sei X ein Banachraum. Für $x \in X$ definieren wir $Jx \in X^{**}$ durch $(Jx)(f) = f(x)$, $f \in X^*$. Zeigen Sie:

(a) $J : X \to X^{**}$ ist linear und beschränkt.

(b) J ist eine Isometrie, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Insbesondere ist J injektiv.
Hinweis: Für "$\geq$"müssen Sie mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zu gegebenem x ein geeignetes $f \in X^*$ definieren.

(2 + 3 = 5 Punkte)

Aufgabe 2:
Gegeben sei $\mathcal{P}_2$, der Raum der Polynome vom Grade höchstens zwei als Teilraum von $\big(C[-1,1], \|\cdot\|_\infty\big)$

(i) Zeigen Sie, dass die durch $f(p) := p'(1)$ gegebene Abbildung $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ linear und stetig ist und berechnen Sie ihre Operatornorm.

(ii) Finden Sie eine normerhaltende Fortsetzung auf $C[-1,1]$

Hinweis zu (i) und (ii): Wie lässt sich $p'(1)$ für $p \in \mathcal{P}_2$ mit Hilfe von Funktionswerten von p angeben?

(5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei X ein reeller Banachraum und $A \subseteq X$ sei konvex.

(a) Zeigen Sie:

 (i) Das Innere $\operatorname{int} A$ und der Abschluss $\overline{A}$ von A sind ebenfalls konvex.

 (ii) Ist $x \in A$ und $y \in \operatorname{int} A$, so ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in \operatorname{int} A$ für alle $\lambda \in [0,1)$.

 (iii) Ist $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, so gilt

$$A \subseteq \overline{\operatorname{int} A}\,.$$

 Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und verwenden Sie den Trennungssatz.

(b) Beweisen Sie folgende Version des Trennungssatzes:

Ist $B \subseteq X$ konvex und abgeschlossen, $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$ und gilt $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene H, welche A und B trennt.

(c) (Existenz von Stützhyperebenen). Eine Hyperebene $H = \{u \in X\ ;\ \langle x', u\rangle = \alpha\}$ mit $x' \in X^* \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Stützhyperebene von A in einem Punkt u, falls

$$\langle x', v\rangle \geq \alpha \quad \text{für alle } v \in A \text{ und } \quad \langle x', u\rangle = \alpha\,.$$

gilt. Zeigen Sie: Gilt $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, dann existiert in jedem Randpunkt x von A eine Stützhyperebene H an A.

(3 + 2 + 1 = 6 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Finden Sie ein Beispiel für einen Banachraum X und zwei disjunkte, konvexe, abgeschlossene Teilmengen A und B, die sich *nicht strikt* trennen lassen.

(b) Zeigen Sie: Die Menge

$$K := \left\{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2\ ;\ \forall k \in \mathbb{N}:\ |x_k| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

ist konvex und abgeschlossen in l^2. Zeigen Sie außerdem: $0 \in \partial K$, aber in 0 existiert keine Stützhyperebene an K. Warum widerspricht dies nicht der Aussage von Aufgabe 3 (c)?

(1 + 3 = 4 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1515SS/FA.html