Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig

WS 2015/2016

Variationsrechnung

1. Übung

Abgabe: Montag, 26. 10. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Auf einem Normalgebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist mit den Funktionen $a_{i,j} = a_{j,i} \in C^1(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, \ldots, n$, und $a \in C(\overline{\Omega})$ der Differentialoperator

$$L[u] := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + au$$

erklärt.
Zeigen Sie mit Hilfe der Gaußschen Integralformel, dass für die Funktionen $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ die verallgemeinerte Greensche Formel gilt, d. h.

$$\int_\Omega L[u]v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega uL[v]\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu_L}\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu_L}v\,\mathrm{d}S\,,$$

wobei $\frac{\partial u}{\partial \nu_L}$ die so genannte Konormalenableitung,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_L} := \sum_{i,j=1}^{n} \nu_j a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,,$$

bezeichnet.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\phi(r) = \begin{cases} e^{-1/r} & \text{für } r > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die k-te Ableitung für $r > 0$ nach einer Formel $\phi^{(k)}(r) = P_k(\frac{1}{r})e^{-1/r}$, mit einem eindeutig bestimmten Polynom P_k, gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \phi(1 - |x|^2)$$

beliebig oft differenzierbar ist, beschränkt ist und außerhalb des Einheitskreises $B := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq 1\}$ verschwindet.

(4 + 2 = 6 Punkte)

Aufgabe 3:

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die auf einem Kompaktum beschränkt ist, aber dort kein Minimum besitzt.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine glatte, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion an, die nach unten beschränkt ist, aber kein Minimum besitzt.

(c) Sei M ein Banachraum und für $E : M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gelte, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$K_t := \{x \in M \ ; \ E(x) \leq t\}$$

kompakt ist. Zeigen Sie, dass dann E nach unten beschränkt ist und sein Minimum in M annimmt.

(1+1+4=6 Punkte)

Aufgabe 4:
Die Anwendung des Dirchletschen Prinzips auf die Durchbiegung einer dünnen eingespannten Platte mit Mittelebene $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ unter vertikaler Belastung führt auf das Variationsproblem

$$\frac{d}{2} \int_\Omega (\Delta u)^2 - 2(1-\alpha) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \mathrm{d}x - \int_\Omega f u \, \mathrm{d}x \to \underset{u \in D}{\mathrm{Min!}}$$

Dabei sind $d > 0$ und $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ Materialkonstanten und $f \in C(\overline{\Omega})$ bezeichnet die Lastdichte. Der Funktionenraum, über den man minimiert, ist

$$D := \{u \in C^2(\overline{\Omega}) \ ; \ u = \tfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}\,.$$

Zeigen Sie, dass dieses Variationsproblem zu

$$\frac{d}{2} \int_\Omega (\Delta u)^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f u \, \mathrm{d}x \to \underset{u \in D}{\mathrm{Min!}}$$

äquivalent ist.
Hinweis: Schreiben Sie den Ausdruck in eckigen Klammern als Divergenz eines Vektorfeldes und wenden Sie den Gaußschen Integralsatz an. Für Ihre Überlegungen dürfen Sie dabei der Einfachheit halber annehmen, dass u dreimal stetig differenzierbar ist. Ferner dürfen Sie verwenden, dass aus den Randbedingungen folgt, dass auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ auf dem Rand von Ω verschwinden.

(4 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html