Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig **WS 2015/2016**

Variationsrechnung

2. Übung

Abgabe: Montag, 02. 11. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1: Betrachten Sie das Variationsfunktional

$$F(u) = \int_{-1}^{1} x^4 u'(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

auf der Menge D der stückweise stetig differenzierbaren Funktionen mit $u(-1) = -1$ und $u(1) = 1$, d.h.

$$\begin{aligned} D = \{u \in C[-1,1]\,;\ &\text{Es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ und } -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1, \\ &\text{so dass } u|_{[t_{i-1},t_i]} \in C^1[t_{i-1},t_i] \text{ für alle } i = 1,\ldots n \text{ und } u(-1) = -1 \text{ und } u(1) = 1\}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\inf_{u \in D} F(u) = 0\,,$$

aber dass das Infimum nicht in D angenommen wird.

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema (Stelle und Art) der Funktion $y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$y(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2$$

auf

$$B := \{x \in \mathbb{R}^2\,;\ |x|^2 \le 1\}\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Beweisen Sie folgendes in der Vorlesung behandelte Lemma:
Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene konvexe Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind äquivalent

(a) f ist konvex.

(b) $\forall x, y \in D: \quad \nabla f(x) \cdot (y - x) \le f(y) - f(x)$

(c) Der Gradient ist ein monotoner Operator, d. h.
$\forall x, y \in D: \quad (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot (x - y) \ge 0$

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Begründen Sie, warum man in Beispiel 6 der Vorlesung (Isoperimetrisches Problem) ohne Einschränkung davon ausgehen kann, dass das Gebiet D konvex ist. Begründen Sie weiterhin, warum man o. E. davon ausgehen kann, dass es durch die x-Achse in zwei flächen- *und* umfangsgleiche Teile zerlegt wird.

Beweisidee: Zu jedem Punkt $x_0 \in \partial D$ gibt es einen Punkt $x_1 \in \partial D$, so dass x_0 und x_1 den Rand in zwei gleich lange Teile teilen. Legen Sie diese Punkte auf die x-Achse und betrachten Sie die Differenz der Flächenteile von D oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse. Lassen sie dann x_0 auf dem Rand entlanglaufen.

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html