Prof. Dr. B. Kawohl **WS 2015/2016**
Dr. S. Littig

Variationsrechnung

3. Übung

Abgabe: Montag, 09. 11. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für Beispiel 3 (Brachystochronenproblem) der Vorlesung, d. h. die Euler-Lagrange-Gleichung für

$$E(y) := \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2g(y_0 - y(x))}}\,.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ein beschränktes Normalgebiet. Bestimmen Sie die erste Variation und die Euler-Lagrange-Gleichung für

(a)
$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du(x)|^2}\,\mathrm{d}x$$

(b)
$$\mathcal{F}(u) = \frac{\int_\Omega |Du(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x},.$$

Minimiert werden soll in beiden Fällen über den Funktionenraum $C^1(\overline{\Omega})$, im zweiten Fall wird natürlich $u = 0$ ausgeschlossen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Das Verhalten eines geraden elastischen Stabes unter einer axial gerichteten Kompressionskraft $\lambda > 0$ wird durch folgendes Variationsproblem beschrieben

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u''(x)^2 - \lambda u'(x)^2\,\mathrm{d}x \to \mathrm{Min}, \quad \text{RB: } u(0) = u(1) = 0$$

Dabei bezeichnet $u(x)$ die horizontale Auslenkung des Stabes an der Stelle $x \in [0,1]$ und die Randbedingung ergibt sich daraus, dass der Stab an den Enden bei $x = 0$ und $x = 1$ fixiert wird.
Dieses Variationsproblem hat nicht die in der Vorlesung behandelte allgemeine Form. Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung dieses Problems unter Verwendung der in der Vorlesung behandelten Methode.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:
Der kleine Pom und der kleine Frit machen Urlaub mit ihren Eltern an der Ostsee. Der Strand ist $300m$ breit, dahinter schließt sich eine $100m$ breite gepflasterte Promenade an. Die beiden Jungs bekommen vom Spielen an der Wasserkante Hunger und wollen sich eine Portion Pommes kaufen gehen. Um zur Pommesbude zu gelangen, könnten die Jungs die $400m$ bis zum Rand der Promenade laufen und dann diese $300m$ bis zu ihrem Ziel entlanglaufen.
Da die beiden großen Hunger haben und diesen so schnell wie möglich stillen wollen, scheint es ihnen sinnvoller, diagonal etwas abzukürzen. Im Sand können sie allerdings nicht ganz so schnell laufen. Eine stetig differenzierbare Funktion $v : [0, 300] \to [1, 3]$ beschreibe hier die Geschwindigkeit der Jungs in m/s in Abhängigkeit des Abstandes zur Wasserkante.
Auf der Promenade kommen sie schneller voran, hier beträgt ihre Geschwindigkeit stets $5\frac{m}{s}$. Gesucht ist der schnellste Weg zur Pommesbude.

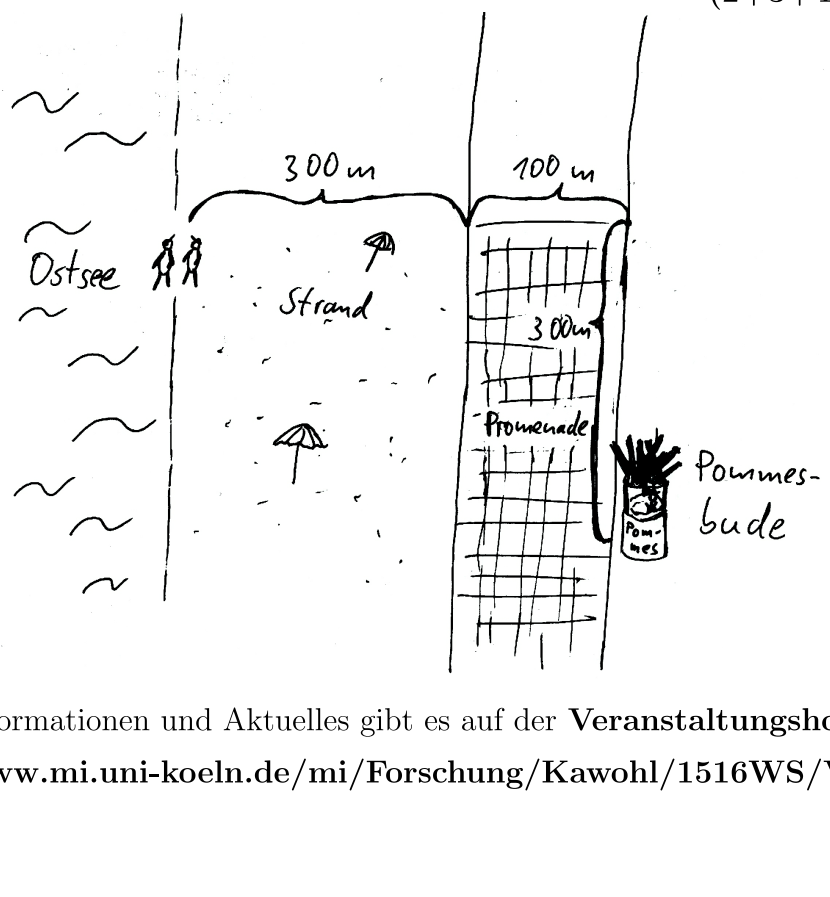
(a) Stellen Sie zunächst ein Funktional T auf, welches stückweise differenzierbaren Wegen γ, welche den Anfangs- und Zielpunkt der beiden Jungs verbinden, die zugehörige Laufzeit $T(\gamma)$ zuordnet.

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung dieses Funktionals. Sie dürfen dabei davon ausgehen, dass die optimale Kurve auf dem Strand und auf der Promenade jeweils mindestens zweimal stetig differenzierbar ist.

(c) Charakterisieren Sie den kürzesten Weg für den Spezialfall, dass auf dem Strand die Geschwindigkeit von Pom und Frit durch $3\frac{m}{s}$ (also unabhängig vom Abstand zum Wasser) gegeben ist.

Hinweis zu (c): Beachten Sie, dass sich reguläre Kurven $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ stets so (um)parametrisieren lassen, dass $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \text{const}$ gilt. Leiten Sie diese Identität ab und nutzen Sie die Zusammenhänge um die partielle Differentialgleichung zu vereinfachen.

(2+3+4=9 Punkte)



Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html