Prof. Dr. B. Kawohl **WS 2015/2016**
Dr. S. Littig

Variationsrechnung

4. Übung

Abgabe: Montag, 16. 11. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Für die Variationsprobleme

(a) $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} v'(x)^2 - 4v(x)^2 \, \mathrm{d}x \to \text{Min}\,, \qquad v(0) = v(2\pi) = 0$

(b) $\mathcal{E}(v) = \int_0^1 v'(x)^3 \, \mathrm{d}x \to \text{Min}\,, \qquad v(0) = 0,\ v(1) = -1$

löse man die Euler-Lagrange-Gleichung und überprüfe mittels Legende-Hadamard-Bedingung und ggf. 2. Variation, ob die gefundenen Lösungen tatsächlich Minima sein können.

(3+2=5 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die eindeutige Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung des Variationsproblems

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u''(x)^2 - \pi u'(x)^2 \, \mathrm{d}x \to \text{Min},$$

hierbei ist $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die den Randbedingungen

(a) $u(0) = u(1) = 0$, $u'(0) = 1$ bzw.

(b) $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, $u'(1) = 0$

genügt.
Hinweis: Verwenden Sie Resultate aus Aufgabe 3 des dritten Übungsblattes und leiten Sie in Analogie zum in der Vorlesung vorgestellten Satz von Euler-Lagrange freie Randbedingungen her.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei X ein Banachraum und $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein Funktional. Der Epigraph von $\mathcal{F}$ ist definiert als

$$\text{epi}(\mathcal{F}) := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}\ ;\ \mathcal{F}(x) \leq t\}$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{F}$ ist genau dann konvex, wenn $\text{epi}(\mathcal{F})$ konvex ist.

(b) $\mathcal{F}$ ist genau dann folgen-unterhalbstetig, wenn $\text{epi}(\mathcal{F})$ abgeschlossen ist.

(c) $\mathcal{F}$ ist genau dann folgen-unterhalbstetig, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ die Subniveaumengen $E_t := \{x \in X \; ; \; \mathcal{F}(x) \leq t\}$ abgeschlossen sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex in* x_1, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\Omega \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_2 = \alpha\}$$

konvex ist.
Eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *Steiner-symmetrisch bezüglich* $\{x_1 = 0\}$, wenn Ω konvex in x_1 und reflexionssymmetrisch an $\{x_1 = 0\}$ ist (d. h. $(x_1, x_2) \in \Omega \Leftrightarrow (-x_1, x_2) \in \Omega$).

Zeigen Sie:

(a) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und Steiner-symmetrisch bezüglich $\{x_1 = 0\}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und ist u ein Minimierer von

$$\mathcal{J}(u) := \int_\Omega |Du(x_1, x_2)|^2 + f(x_2) u(x_1, x_2) \, \mathrm{d}(x_1, x_2) \,, \tag{1}$$

in der Funktionenklasse $D = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) \; ; \; u|_{\partial\Omega} = 0\}$, so ist u reflexionssymmetrisch bezüglich $\{x_1 = 0\}$ (d. h. $\forall x \in \mathbb{R}^2 : \; u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$).

(b) Ist Ω Steiner-symmetrisch bezüglich aller Richtungen (das heißt für jede Drehmatrix $P \in SO(2)$ ist $P\Omega$ Steiner-symmetrisch bezüglich $\{x_1 = 0\}$), so ist Ω bereits eine Kreisscheibe.

(c) Ist $\Omega = B$ eine Kreisscheibe, so ist jeder Minimierer des Funktionals

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Du(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_\Omega u(x) \, \mathrm{d}x$$

(vgl. Beispiel 4 der Vorlesung (Kreismembran unter homogener Belastung)) rotationssymmetrisch.

(6 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html