Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig

WS 2015/2016

Variationsrechnung

5. Übung

Abgabe: Montag, 23. 11. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Eine Hochspannungsfreileitung überspannt ein breites Tal. Die Hochspannungsfreileitungsmasten stehen im Abstand von 2km auseinander und die Kabelaufhängungspunkte befinden sich auf identischer Höhe. Die dazwischen aufgehängten Stromleitungskabel sind 2350m lang. Wie weit hängen die Stromkabel gegenüber ihren Aufhängungspunkten in der Mitte durch? Auf welcher Höhe befindet sich der Schwerpunkt der Stromkabel?
Hinweis: Die Stromkabel werden sich sicher so ausrichten, dass ihr Schwerpunkt so tief wie möglich ist. Die Höhe des Schwerpunktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ der Länge L, ist durch $\frac{1}{L}\int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ gegeben. Außerdem gilt $2,350 \approx e^1 - e^{-1}$.
(6 Punkte)

Aufgabe 2:
(a) Sei X ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist $\mathcal{F}$ normstetig, so ist es auch schwach stetig.
(ii) Ist $\mathcal{F}$ schwach stetig, so ist es auch normstetig.
(iii) Ist $\mathcal{F}$ konvex und normstetig, so ist es schwach unterhalbstetig.

(b) Finden Sie Beispiele für

(i) ein normstetiges konvexes Funktional, welches nicht schwach stetig ist,
(ii) ein konvexes, nichtlineares Funktional $\mathcal{H} : X \to \mathbb{R}$, welches schwach stetig ist. X soll in diesem Beispiel unendlichdimensional sein.
(4 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex. Wir sagen, dass eine Funktion $f \in L^p(\Omega)$ eine schwache α-te Ableitung in $L^p(\Omega)$ besitzt, wenn es eine Funktion $g \in L^p(\Omega)$ gibt, so dass

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) : \qquad \int_\Omega f D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi \,\mathrm{d}x \,. \tag{1}$$

Ist f hinreichend oft differenzierbar, so folgt aus der Formel zur partiellen Integration, dass $g = D^\alpha f$. Die Formel (1) hat jedoch auch für weniger glatte Funktionen Sinn und wir schreiben in diesem Fall ebenso $D^\alpha f := g$ als Bezeichnung für die α-te schwache Ableitung. Der Raum aller Funktionen f, die sämtliche schwachen Ableitungen bis zur

Ordnung k besitzen (d. h. $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ für alle α mit $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq k$) wird mit $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet.
Zeigen Sie:

(a) Die α-te schwache Ableitung ist, so sie existiert, im L^p-Sinne (d. h. bis auf Modifikationen auf Nullmengen) eindeutig bestimmt.

(b) Die schwache Ableitung ist linear, das heißt es gilt $D^\alpha(u + \lambda v) = D^\alpha u + \lambda D^\alpha v$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$.

(c) $W^{k,p}(\Omega)$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{1/p} & \text{wenn } p < \infty \\ \max\{\|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \ ; \ |\alpha| \leq k\} & \text{wenn } p = \infty \end{cases}$$

vollständig. Die Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$ dürfen Sie voraussetzen.

(d) Ist $f \in W^{k,p}(\Omega)$, so gilt

$$D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta} f$$

für alle Mulitindizes α, β mit $|\alpha| + |\beta| \leq k$

(e) Ist $f \in W^{k,p}(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$, so gilt

$$D^\alpha f \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)\,.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ und $\phi \in C_0^\infty(B)$, $B := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x| < 1\}$ eine Testfunktion.

(i) Zeigen Sie, dass dann die Funktion $f \star \phi$, punktweise für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f \star \phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

(ii) Zeigen Sie, dass $f \star \phi$ beliebig oft differenzierbar ist und die α-te Ableitung (α ein Mulitindex) durch

$$D^\alpha(f \star \phi) = f \star (D^\alpha \phi)$$

gegeben ist.

(iii) Sei nun $1 \leq p < \infty$ und φ zusätzlich derart, dass $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\,\mathrm{d}x = 1$. Wir definieren zu $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Zeigen Sie, dass $f \star \varphi_\epsilon \to f$ in $L^p(\Omega)$, wenn $\varepsilon \to 0$.

(iv) Zeigen Sie unter den Annahmen von (iii), dass für $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

$$D^\alpha(f \star \varphi_\epsilon) = (D^\alpha f) \star \varphi_\varepsilon\,.$$

für alle Multiindizes $|\alpha| \leq k$. Was folgt daraus über die Approximierbarkeit von $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen durch glatte Funktionen?

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html