Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig **WS 2015/2016**

Variationsrechnung

6. Übung

Abgabe: Montag, 30. 11. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass sich die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ gleichmäßig durch Funktionen aus $C^1[-1,1]$ approximieren lässt. Zeigen Sie, dass die approximierende Folge auch so gewählt werden kann, dass sie bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm,

$$\|u\|_1 := \left(\int_{-1}^{1} u'(x)^2 + u(x)^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

eine Cauchyfolge ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Sei X ein Hilbertraum und $D \subseteq X$ eine dichte Teilmenge. Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X und es gelte

$$\forall g \in D : \qquad \langle g, f_k\rangle \to 0 \quad (k \to \infty)\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach gegen Null konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$f_k(x) := \sin(kx)\ ,$$

schwach in $L^2(0,2\pi)$ gegen Null konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie die Konvergenzaussage zunächst für Treppenfunktionen.

(c) Wir betrachten die Funktionenfolge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$g_k(x) := \begin{cases} k & x \in (0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\ .$$

Zeigen Sie, dass

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(0,2\pi) : \qquad \int_0^{2\pi} \varphi g_k \,\mathrm{d}x \to 0 \quad (k \to \infty)\,,$$

aber dass $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *nicht* schwach gegen Null in $L^2(0,2\pi)$ konvergiert. Inwieweit steht dies nicht im Widerspruch zu der Tatsache, dass C_0^∞-Funktionen dicht in $L^2(0,2\pi)$ sind?

(d) Sei X ein reeller Hilbertraum. Zeigen Sie, dass wenn $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach in X gegen x konvergiert und wenn $(\|x_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\|x\|$ konvergiert, dass dann auch $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bereits stark gegen x konvergiert.

(8 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet und $c \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Variationsproblem

$$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega u^2 + |Du|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} c|u|^2 \,\mathrm{d}S \to \text{Min!}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathcal{G}(u) := \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x = 1$$

und

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega u \,\mathrm{d}x = 0$$

auf der Funktionenklasse

$$D := C^2(\overline{\Omega})\,.$$

Leiten Sie dafür die Euler-Lagrange-Gleichung sowie die zugehörigen natürlichen Randbedingungen her.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Ein Massepunkt mit Masse $m > 0$ bewege sich im $\mathbb{R}^3$ unter dem Einfluss einer äußeren Kraft f. Die Bahn des Punktes im $\mathbb{R}^3$ werde mit $t \mapsto x(t)$ bezeichnet (t ist die Zeit) und die Kraft f wird durch ein Potential U beschrieben, das heißt

$$f(t,x) = -U_x(t,x)$$

(man beachte: $U : R \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f : R \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$). Der Massepunkt bewege sich in einem vorgegebenen Zeitinvervall von einem Punkt x_1 zu einem Punkt x_2 auf der Kurve x, die die sogenannte Wirkung minimiert:

$$E(x) := \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} m|x'(t)|^2 \,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} U(t,x(t)) \,\mathrm{d}t \to \text{Min!}$$

Das erste Integral beschreibt hierbei die kinetische und das zweite die potentielle Energie.

(a) Man bestimme die Euler-Lagrange-Gleichung des Problems. Welches mechanische Gesetz erhält man damit?

(b) Für den Fall eines autonomen Potentials (das heißt U hängt nicht von t ab) bestimme man eine Erhaltungsgröße und gebe eine mechanische Interpretation.

Bemerkung: Eine Erhaltungsgröße ist eine physikalische Größe, die sich im zweitlichen Verlauf nicht ändert, also konstant ist.

(4 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html