Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig

WS 2015/2016

Variationsrechnung

7. Übung

Abgabe: Montag, 07. 12. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass für alle $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und alle $a, b > 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

Hinweis: Nutzen Sie die Konvexität der Exponentialfunktion.

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $|\Omega| < \infty$, $f \in L^1(\Omega)$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass

$$\varphi\Big(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x\Big) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Da φ konvex ist, gibt es für alle $t \in \mathbb{R}$ ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi(s) - \varphi(t) \geq \alpha(s - t)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und die Funktion $f : \Omega \times I \to \overline{\mathbb{R}}$ habe folgende Eigenschaften:

- $f(\cdot, t)$ ist integrierbar für alle $t \in \mathbb{R}$,
- $f(x, \cdot)$ ist differenzierbar auf I für fast alle $x \in \Omega$,
- es gibt eine Funktion $g \in L^1(\Omega)$, so dass $|f_t(x,t)| \leq g(x)$ für alle $t \in I$ und fast alle $x \in \Omega$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $F(t) := \int_\Omega f(x,t)\,\mathrm{d}x$ dann auf I differenzierbar ist und dass

$$F'(t) = \int_\Omega f_t(x,t)\,\mathrm{d}x\,.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$.

(a) Gegeben sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass es Konstanten C_1, $C_2 > 0$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen

- $|\Phi(t)| \leq C_1|t|$ und
- $|\Phi'(t)| \leq C_2$

gelten. Zeigen Sie, dass dann für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ auch die Komposition $\Phi \circ u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt und sich die schwache Ableitung mit der Kettenregel

$$D(\Phi \circ u) = \Phi'(u)Du$$

berechnen lässt. Sie dürfen hierbei voraussetzen, dass Funktionen aus $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$ dicht liegen.

(b) Zeigen Sie, dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ auch die Funktion $|u|$ in $W^{1,p}(\Omega)$ liegt. Berechnen Sie die schwache Ableitung von u.

Hinweis: Nutzen Sie eine Approximation der Betragsfunktion ähnlich zu Aufgabe 1 vom 6. Übungsblatt.

Bemerkung: Diese Aussage zeigt, dass $W^{1,p}(\Omega)$ ein sogenannter Banachverband ist. Insbesondere folgt, dass auch u^+, u^- sowie die punktweisen Maxima und Minima zweier Funktionen wiederum in $W^{1,p}(\Omega)$ liegen.

(c) Führen Sie anhand eines Beispiels aus, dass die Implikation $u \in W^{2,p}(\Omega) \Rightarrow |u| \in W^{2,p}(\Omega)$ im Allgemeinen falsch ist.

(7 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\Omega = B_1(0)$ die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$. Für welche Werte $\beta > 0$ liegt die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in $W^{k,p}(\Omega)$?

(5 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:

http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html