Prof. Dr. B. Kawohl
Dr. S. Littig

WS 2015/2016

Variationsrechnung

8. Übung

Abgabe: Montag, 14. 12. 2015, bis 10:00 Uhr
(in den Kasten für Übungsblätter im Studierendenarbeitsraum)

Aufgabe 1:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $|\Omega| < \infty$. Zeigen Sie

$$u \in L^\infty(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \forall 1 \leq p < \infty : \; |u|^p \in L^1(\Omega) \text{ und } \sup_{p<\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie die Eindeutigkeit der starken Ableitung. Das heißt sind $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei $\|\cdot\|_{m,p}$-Cauchy-Folgen aus $C^{m,p}$, die beide in $L^p(\Omega)$ gegen ein $u \in L^p(\Omega)$ konvergieren, so gilt auch

$$L^p - \lim_{k\to\infty} D^\alpha u_k = L^p - \lim_{k\to\infty} D^\alpha v_k$$

für jedes α mit $|\alpha| \leq m$.

Bemerkung: Dies rechtfertigt die Aussage

$$H^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\;;\; \exists (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ in } C^{m,p}(\Omega) \text{ Cauchyfolge, so dass } \|u - u_k\|_p \to 0\}$$

aus der Vorlesung.

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ein Normalgebiet und $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig. Finden Sie eine Variationsaufgabe in $D := \{u \in C^2(\overline{\Omega})\;;\; u|_{\partial\Omega} = 0\}$, so dass deren Lösung, wenn Sie hinreichend glatt ist, den folgenden Gleichungen genügt

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Begründen Sie Ihre Lösung.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Wir definieren $\Omega_{-1} := \Omega_0 := \emptyset$ und für $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\Omega_k := \{x \in \mathbb{R}^n\;;\; |x| < k, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k\}$$

Zeigen Sie, dass $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $U_k := \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_{k-1}}$ eine lokal endliche Überdeckung von Ω durch offene Mengen ist.

(b) Konstruieren Sie eine zugehörige Partition der Eins, das heißt eine Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$, so dass

- $0 \leq \psi_k \leq 1$
- $\operatorname{supp} \psi_k \subseteq U_k$
- $\forall x \in \Omega : \ \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k(x) = 1.$

(c) Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und für $k \in \mathbb{N}$

$$u_k := \psi_k \, u \,.$$

Zeigen Sie, dass zu jedem Mulitindex $|\alpha| \leq m$ die Funktion u_k α-mal schwach differenzierbar ist und dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha u_k = D^\alpha u$$

gilt.

(2+3+2=7 Punkte)

Weitere Informationen und Aktuelles gibt es auf der **Veranstaltungshomepage**:
http://www.mi.uni-koeln.de/mi/Forschung/Kawohl/1516WS/VR.html